TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Masterarbeit

Automorphe Produkte singulären Gewichts zu einfachen Gittern von Primzahlstufe

Markus Schwagenscheidt

04. März 2013

unter der Betreuung von

Prof. Dr. Nils Scheithauer

Danksagung

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Nils Scheithauer für die Vergabe dieses interessanten Themas sowie die umfangreiche Betreuung während der Anfertigung der Arbeit bedanken. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und nahm sich viel Zeit, mit mir über Probleme zu diskutieren.

Desweiteren danke ich Fabian Werner für viele hilfreiche Diskussionen und das Korrekturlesen der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine mögliche Verallgemeinerung elliptischer Modulformen stellen orthogonale Modulformen dar. Das sind meromorphe Funktionen auf höherdimensionalen komplexen Halbebenen, die geeignet unter der Wirkung einer diskreten Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2,n)$ transformieren. In seiner berühmten Arbeit „Automorphic Forms with Singularities on Grassmannians“ erklärt Borcherds den singulären Theta-Lift, der es erlaubt, aus vektorwertigen Modulformen zur Weil-Darstellung eines geraden Gitters vom Typ $(2,n)$ orthogonale Modulformen zu konstruieren (siehe [Bor98], Theorem 13.3). Die orthogonalen Modulformen, die durch diesen sogenannten Borcherdslift entstehen, haben interessante Produktentwicklungen in den Spitzen und heißen daher auch automorphe Produkte oder Borcherdsprodukte. Des Weiteren lassen sich die Null- und Polstellen automorpher Produkte auf einfache Weise durch sogenannte Heegner-Divisoren beschreiben.

Bekanntermaßen existieren nicht-triviale holomorphe elliptische Modulformen zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erst ab Gewicht $k = 4$. Es stellt sich heraus, dass es auch für nicht-triviale holomorphe orthogonale Modulformen ein kleinstmögliches positives Gewicht gibt, das sogenannte singuläre Gewicht. In ihrer Dissertation (siehe [Hag10]) hat Hagemeier ein neues automorphes Produkt singulären Gewichts zu einem Gitter ungerader Primzahlstufe mit trivialem Kontrollraum bestimmt. Dabei bezeichnet der Kontrollraum einen gewissen Raum vektorwertiger Spitzenformen, der Einschränkungen liefert, wann es zu einem vorgegebenen Hauptteil eine passende vektorwertige Modulform mit diesem Hauptteil gibt. Ist der Kontrollraum trivial, so lässt sich jeder Hauptteil, der einer offensichtlichen Bedingung genügt, durch eine passende vektorwertige Modulform realisieren. Wir nennen ein Gitter mit trivialem Kontrollraum auch *einfach*. Hagemeier hat nun gezeigt, dass es bis auf Isomorphie nur sechs einfache Gitter ungerader Primzahlstufe gibt. Für eines dieser einfachen Gitter hat sie ein automorphes Produkt singulären Gewichts gefunden.

Von der vektorwertigen Modulform, deren Borcherdslift dieses automorphe Produkt singulären Gewichts ergibt, sind zunächst nur das (negative) Gewicht, der Hauptteil sowie der konstante Koeffizient der Nullkomponente bekannt. Diese Informationen legen die Modulform zwar bereits eindeutig fest, es ist aber nicht klar, wie man ihre Fourier-Koeffizienten praktisch berechnen kann. Die explizite Konstruktion der vektorwertigen Modulform, also die Berechnung ihrer Fourier-Koeffizienten, ist eines der Hauptziele dieser Arbeit. Kennen wir die Fourier-Koeffizienten, so können wir Reihenentwicklungen des automorphen Produkts in verschiedenen Spitzen herleiten.

Aufbau der Arbeit

Wir beschreiben nun den Aufbau der Arbeit und unsere Vorgehensweise genauer:

Zunächst beginnen wir im ersten Kapitel mit den Grundlagen über Gitter und ihre Diskriminantenformen. Insbesondere betrachten wir Gitter von Primzahlstufe.

Danach definieren wir im zweiten Kapitel elliptische Modulformen zu Kongruenzuntergruppen. Wir geben eine Gewichtsformel an, die Auskunft über Null- und Polstellenordnungen nicht-trivialer Modulformen zu Kongruenzuntergruppen gibt. Weiter konstruieren wir Modulformen zu $\Gamma_1(N)$ durch Produkte und Quotienten der Dedekindschen Eta-Funktion

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} \prod_{n\geq 1}(1 - e^{2\pi i n\tau}).$$

Im dritten Kapitel definieren wir die Weil-Darstellung eines geraden Gitters gerader Signatur sowie vektorwertige Modulformen zur Weil-Darstellung. Wir zeigen, dass die Komponentenfunktionen vektorwertiger Modulformen elliptische Modulformen zu $\Gamma_1(N)$ und gewissen Charakteren sind. Umgekehrt kann man vektorwertige Modulformen als Anhebungen elliptischer Modulformen konstruieren. Außerdem geben wir eine explizite Formel für die Fourier-Koeffizienten vektorwertiger Eisensteinreihen zur dualen Weil-Darstellung gerader Gitter von Primzahlstufe an. Diese Koeffizienten bestimmen zusammen mit dem Hauptteil der vektorwertigen Modulform, die geliftet wird, das Gewicht des Borcherdsprodukts.

Im vierten Kaptitel erklären wir Modulformen zu orthogonalen Gruppen sowie Borcherds singulären Theta-Lift.

Das fünfte Kapitel bildet den Hauptteil der Arbeit. Zunächst stellen wir Hagemeiers Klassifikation der Gitter ungerader Primzahlstufe mit trivialem Kontrollraum vor und ergänzen sie um den Fall der Gitter der Stufe 2. Wir erhalten die folgenden Isomorphie-Klassen einfacher Gitter vom Typ $(2, n), n \geq 4$, und Primzahlstufe:

Typ	Stufe	Diskriminantengruppe
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$
$(2,10)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$(2,4)$	3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$(2,4)$	3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$
$(2,4)$	3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$
$(2,8)$	3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$(2,6)$	5	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$(2,8)$	7	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Unter den gefundenen Gittern bestimmen wir diejenigen, zu denen es automorphe Produkte singulären Gewichts gibt. Dabei betrachten wir nur solche vektorwertigen Modulformen als Inputs für den Borcherdslift, deren Hauptteil nicht-negative Fourier-Koeffizienten hat. Hagemeier hat gezeigt, dass es ein automorphes Produkt vom singulären Gewicht

1 für das Gitter vom Typ $(2,4)$ der Stufe 3 mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ gibt. Es zeigt sich, dass es zwei weitere automorphe Produkte singulären Gewichts zu Gittern der Stufe 2 gibt, nämlich zum dritten und vierten Gitter in der obigen Liste, wobei sich das automorphe Produkt zum vierten Gitter bereits in [Bor98], Beispiel 13.7, findet. Für die neuen automorphen Produkte singulären Gewichts zum dritten und siebten Gitter konstruieren wir die zugehörigen vektorwertigen Modulformen explizit als Anhebungen von Eta-Produkten zu $\Gamma_1(2)$ bzw. $\Gamma_1(3)$. Damit können wir die Fourier-Koeffizienten der vektorwertigen Modulformen leicht berechnen und somit Produkt- und Reihenentwicklungen der automorphen Produkte in verschiedenen Spitzen bestimmen.

Konstruktion der vektorwertigen Modulform

Es sei L ein Gitter vom Typ $(2,4)$ der Stufe 3 mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Wir nehmen an, dass

$$L = A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3) \oplus II_{1,1}(3)$$

gilt, wobei $A_2(-1)$ das Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit der quadratischen Form $q(x,y) = -x^2 - xy - y^2$ und $II_{1,1}(3)$ das Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit der quadratischen Form $q(x,y) = 3xy$ bezeichnet.

Wir wollen die Konstruktion der vektorwertigen Modulform F zur Weil-Darstellung von L, deren Borcherdslift auf das von Hagemeier gefundene automorphe Produkt singulären Gewichts führt, noch etwas detaillierter beschreiben. Die gesuchte vektorwertige Modulform hat Gewicht -1 und Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$ für ein γ in der Diskriminantengruppe L'/L von L mit $q(\gamma) \equiv -1/3 \mod 1$. Wir betrachten das Eta-Produkt

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)^3}.$$

Es ist eine elliptische Modulform zu $\Gamma_1(3)$ vom Gewicht -1 und Charakter $\chi_\gamma\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = e(-b/3)$. Wir heben f mittels Scheithauers $\Gamma_1(3)$-Lift (aus [Sch11]) zu einer vektorwertigen Modulform

$$F = \sum_{M \in \Gamma_1(3) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M)^{-1}\,\mathfrak{e}_\gamma$$

zur Weil-Darstellung von L vom Gewicht -1 an. Eine explizite Rechnung zeigt, dass F den richtigen Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$ hat und dass die Fourier-Koeffizienten von F aus den Fourier-Koeffizienten von f und

$$f|_S(\tau) = 3\sqrt{3}i \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/3)^3}$$

berechnet werden können. Da die Fourier-Koeffizienten der Eta-Produkte leicht (z.B. mittels eines Computer-Algebra-Systems wie PARI/GP) berechnet werden können, kann man auch die Fourier-Koeffizienten von F leicht bestimmen.

Entwicklungen des automorphen Produkts in den Spitzen

Der Borcherdslift Ψ der so konstruierten vektorwertigen Modulform F ist ein automorphes Produkt vom singulären Gewicht 1. Wir wollen Produkt- und Reihenentwicklungen von Ψ in verschiedenen Spitzen angeben.

Das Gitter L lässt sich schreiben als orthogonale direkte Summe $L = K \oplus II_{1,1}(3)$ mit einem Gitter K vom Typ $(1,3)$. Es seien $z, \zeta \in L$ zwei primitive isotrope Elemente (d.h. $\mathbb{Q}z \cap L = \mathbb{Z}z$ und $q(z) = 0$) mit $\langle z, \zeta \rangle = 3$, die die hyperbolische Ebene $II_{1,1}(3)$ in der obigen Zerlegung von L erzeugen. Wir nennen z eine Spitze. Das Element

$$\gamma = z/3 - \zeta/3 + L \in L'/L.$$

erfüllt $q(\gamma) \equiv -1/3 \mod 1$. Es sei F die vektorwertige Modulform vom Gewicht -1 und Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$ wie oben.

Die Menge der Vektoren x im dualen Gitter K' mit positiver Norm $(x, x) > 0$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Wir wählen eine davon aus und nennen sie den positiven Kegel C. Wir setzen $K'^+ = (K' \cap \overline{C}) \setminus \{0\}$ und definieren die Funktion

$$f_S(\tau) = \frac{1}{3\sqrt{3}i} f|_S(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/3)^3} = 1 + 3q^{1/3} + 9q^{2/3} + 21q + 48q^{4/3} + 99q^{5/3} + \ldots$$

Dann hat Ψ in der Spitze z die Produkt- und Fourier-Entwicklungen

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\lambda \in K'^+} \frac{\big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{3[f_S](q(\lambda))}}{\big(1 - e(3(\lambda, Z))\big)^{[f_S](q(\lambda))}} = 1 + \sum_{\lambda \in K'^+} c(\lambda) e((\lambda, Z)),$$

wobei $c(\lambda)$ nur dann ungleich 0 ist, wenn $\lambda = n\mu$ für ein primitives isotropes $\mu \in K'^+$ gilt, in welchem Fall $c(\lambda)$ der Koeffizient bei q^n in

$$\frac{\eta(\tau)^3}{\eta(3\tau)} = 1 - 3q + 6q^3 - 3q^4 - 6q^7 + 6q^9 + 6q^{12} + \ldots$$

ist.

Jetzt wählen wir primitive isotrope Elemente $x, \xi \in K$ mit $\langle x, \xi \rangle = 3$, die die hyperbolische Ebene $II_{1,1}(3)$ in $K = A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3)$ erzeugen, und setzen

$$\gamma = x/3 - \xi/3 + L \in L'/L.$$

Wir nennen die Untergruppe G der orthogonalen Gruppe $O(K)$, die von den Spiegelungen $\sigma_\alpha(x) = x - (x, \alpha) q(\alpha)^{-1} \alpha$ entlang der Vektoren $\alpha \in K'$ mit $q(\alpha) = -1/3$ und $\alpha = \gamma \mod K$ erzeugt werden, die Weyl-Gruppe zu F. Das automorphe Produkt Ψ hat dann in der Spitze z die Fourier-Entwicklung

$$\Psi_z(Z) = \sum_{\sigma \in G} \det(\sigma) \frac{\eta(9(\sigma(\rho), Z))^3}{\eta(3(\sigma(\rho), Z))},$$

wobei $\rho = \frac{1}{3}x$ der sogenannte Weyl-Vektor ist.

1 Gitter und Diskriminantenformen

Wir führen in diesem Kapitel die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von quadratischen Formen, Gittern und Diskriminantenformen ein. Gute weiterführende Referenzen sind z.B. [CS99] oder [Ebe02].

1.1 Quadratische Moduln

Im Folgenden sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter freier R-Modul, d.h. $M = Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und eine Basis $b_1, \ldots, b_m \in M$.

Definition 1.1.1. Eine Abbildung $q : M \to R$ heißt *quadratische Form auf* M, falls die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

1. $q(rx) = r^2 q(x)$ für alle $r \in R, x \in M$.
2. Die Abbildung $\langle x, y\rangle = q(x+y) - q(x) - q(y)$ ist eine symmetrische Bilinearform.

Eine quadratische Form q heißt *nicht-ausgeartet*, wenn es zu jedem $x \in M \setminus \{0\}$ ein $y \in M$ gibt mit $\langle x, y\rangle \neq 0$. Sie heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*), wenn $q(x) > 0$ (bzw. $q(x) < 0$) für alle $x \in M \setminus \{0\}$ gilt.

Ein Paar (M, q) mit einer nicht-ausgearteten quadratischen Form q auf M heißt *quadratischer Modul* (bzw. *quadratischer Raum* falls R ein Körper ist).

Setzen wir $x = y$ in der Definition, so erhalten wir $2q(x) = \langle x, x\rangle$. Ist also $2 \neq 0$ in R, so ist q durch die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eindeutig festgelegt.

Definition 1.1.2. Sei (M, q) ein quadratischer Modul und $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq M$ eine Basis von M. Die symmetrische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \cdots & \langle b_1, b_m\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_m, b_1\rangle & \cdots & \langle b_m, b_m\rangle \end{pmatrix}$$

heißt *Gram-Matrix von M bezüglich der Basis B*.

Definition 1.1.3. Seien (M, q) und (M', q') quadratische Moduln. Eine R-lineare Abbildung $\sigma : M \to M'$ heißt *Isometrie*, falls σ injektiv ist und $q'(\sigma(x)) = q(x)$ für alle $x \in M$ gilt. Zwei Moduln heißen *isometrisch*, falls es eine bijektive Isometrie zwischen ihnen gibt. Die Menge aller Isometrien $O(M)$ von M auf sich selbst heißt *orthogonale Gruppe von M*.

Definition 1.1.4. Seien (M, q) und (M', q') quadratische Moduln. Wir definieren die *orthogonale direkte Summe von* M *und* M' als die direkte Summe $M \oplus M'$ mit der quadratischen Form $Q(x + x') = q(x) + q(x')$. Dann ist $(M \oplus M', Q)$ ein quadratischer Modul mit $\langle M, M' \rangle = 0$.

Das folgende Resultat ist aus der linearen Algebra bekannt:

Satz 1.1.5. *Sei* (V, q) *ein quadratischer Raum über* $\mathbb{R}$ *der Dimension* m. *Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen* b^+ *und* b^- *mit* $b^+ + b^- = m$, *so dass* V *isometrisch ist zu* $\mathbb{R}^{b^+, b^-} := (\mathbb{R}^m, Q)$, *wobei*

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = x_1^2 + \cdots + x_{b^+}^2 - x_{b^+ + 1}^2 - \cdots - x_{b^+ + b^-}^2.$$

Das Tupel (b^+, b^-) *nennen wir den* Typ von V *und* $r = b^+ - b^-$ *die* Signatur von V.

Haben wir einen rationalen quadratischen Raum (V, q), so können wir ihn in den reellen quadratischen Raum $V \otimes \mathbb{R}$ mit der quadratischen Form $Q(x \otimes r) = r^2 q(x)$ einbetten und dann den Typ und die Signatur von V als den Typ und die Signatur von $V \otimes \mathbb{R}$ definieren.

1.2 Gitter

In diesem Abschnitt sei (V, q) ein quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$ der Dimension m.

Definition 1.2.1. Ein *Gitter* L *in* V ist ein $\mathbb{Z}$-Modul in V vom Rang m. Den Typ und die Signatur von L definieren wir als den Typ und die Signatur von V.

Ein Gitter L in V ist also von der Form $L = \mathbb{Z}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_m$ für eine geeignete Basis $b_1, \ldots, b_m \in V$, und die quadratische Form q und die dazugehörige Bilinearform auf L nehmen Werte in $\mathbb{Q}$ an. Die *Determinante* $\det(L)$ *von* L ist definiert als die Determinante der Gram-Matrix bzgl. einer Basis von L. Die Determinante ist unabhängig von der Wahl der Basis, da jede Basiswechselmatrix zweier Basen von L ganzzahlige Einträge hat und invertierbar ist, also Determinante ± 1 hat. Die orthogonale Gruppe $O(L)$ eines Gitters L in V definieren wir durch

$$O(L) = \{\sigma \in O(V) : \sigma(L) = L\}.$$

Definition 1.2.2. Ein Gitter L in V heißt *ganz*, falls $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $x, y \in L$ gilt, und es heißt *gerade*, falls $\langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$ gilt.

Ein gerades Gitter ist ein quadratischer Modul über $\mathbb{Z}$. Wir können also ein gerades Gitter (L, q) auch unabhängig vom umgebenden rationalen Raum definieren und L bei Bedarf in $V = L \otimes \mathbb{Q}$ einbetten. Da wir uns im Folgenden hauptsächlich mit geraden Gittern beschäftigen, erwähnen wir den umgebenden rationalen quadratischen Raum V daher oft nicht.

Definition 1.2.3. Sei (V, q) ein rationaler quadratischer Raum und L ein Gitter in V. Die Menge

$$L' = \{x \in V : \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in L\}$$

heißt das *duale Gitter zu* L. Die *Stufe von* L ist die kleinste natürliche Zahl N mit $Nq(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in L'$.

Ist $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq V$ eine Basis von L, so existiert eine eindeutig bestimmte Basis $B' = \{b'_1, \ldots, b'_m\}$ von V mit $\langle b_i, b'_j \rangle = \delta_{ij}$, die zu B duale Basis. Man erhält b'_i als denjenigen Vektor, der als Koordinaten bzgl. B die i-te Spalte von G^{-1} hat, d.h. es gilt $b'_i = g_1 b_1 + \cdots + g_m b_m$ wenn $(g_1, \ldots, g_m)$ die i-te Spalte von G^{-1} bezeichnet (beachte, dass die Gram-Matrix $G = (\langle b_i, b_j \rangle)$ von L bzgl. B invertierbar ist, da q nicht-ausgeartet ist). Man prüft leicht nach, dass $L' = \mathbb{Z}b'_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b'_m$ gilt, also ist L' tatsächlich ein Gitter.

Da G^{-1} die Basiswechselmatrix von B' nach B ist, erhalten wir die Gram-Matrix von L' bzgl. B' als $(G^{-1})^t G G^{-1} = G^{-1}$.

Satz 1.2.4. *Sei L ein gerades Gitter der Stufe N. Dann gilt $NL' \subseteq L$.*

Beweis. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von L und $B' = \{b'_1, \ldots, b'_m\}$ die zu B duale Basis. Weiter sei G die Gram-Matrix von L bzgl. B. Dann ist G^{-1} die Gram-Matrix von L' bzgl. B'. Es gilt

$$N\langle b'_i, b'_j \rangle = N(q(b'_i + b'_j) - q(b'_i) - q(b'_j)) \in \mathbb{Z}$$

nach Definition von N, d.h. die Matrix NG^{-1} hat ganzzahlige Einträge. Nach den obigen Bemerkungen ist Nb'_i eine Linearkombination der b_j mit Koeffizienten aus der j-ten Spalte von NG^{-1}. Damit folgt $Nb'_i \in L$, also $NL' \subseteq L$. □

Definition 1.2.5. Sei L ein gerades Gitter. Ein Element $x \in L \setminus \{0\}$ heißt *primitiv*, falls $\mathbb{Q}x \cap L = \mathbb{Z}x$ gilt. Es heißt *isotrop*, wenn $q(x) = 0$ gilt, und *anisotrop* andernfalls. Die *Stufe von* x ist definiert als die eindeutig bestimmte positive ganze Zahl N mit $\langle x, L \rangle = N\mathbb{Z}$.

Hat $x \in L$ Stufe N, so gilt $x/N \in L'$, denn für $y \in L$ haben wir $\langle x, y \rangle \in N\mathbb{Z}$ und somit $\langle x/N, y \rangle \in \mathbb{Z}$.

Satz 1.2.6. *Sei L ein gerades Gitter. Dann teilt die Stufe jedes primitiven Elements in L die Stufe von L.*

Beweis. Sei $x \in L$ ein primitives Element der Stufe N. Dann ist $x' := x/N \in L'$ und $Nx' \in L$. Wir haben $nx' \notin L$ für $0 < n < N$, da x primitiv ist. Damit hat $x' + L$ Ordnung N in der abelschen Gruppe L'/L. Nach dem letzten Satz teilt die Ordnung jedes Elements von L'/L die Stufe von L. □

Hat L Primzahlstufe p, so hat also jedes primitive Element in L entweder Stufe 1 oder Stufe p.

Beispiel 1.2.7. Das Gitter $II_{1,1} = (\mathbb{Z}^2, q)$ mit der quadratischen Form $q(a,b) = ab$ heißt *hyperbolische Ebene*. Es ist ein gerades Gitter vom Typ $(1,1)$. Allgemeiner nennen wir auch jedes gerade Gitter, das zu $II_{1,1}$ isometrisch ist, eine hyperbolische Ebene.

Ist (L,q) eine hyperbolische Ebene und $N \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir $II_{1,1}(N) = (L, Nq)$ für die mit N skalierte hyperbolische Ebene.

Ist L ein gerades Gitter und $J \subseteq L$ ein Teilgitter, so sagen wir J spaltet orthogonal von L ab, wenn es ein Teilgitter $K \subseteq L$ gibt mit $L = K \oplus J$ und $\langle K, J\rangle = 0$.

Satz 1.2.8. *Sei L ein gerades Gitter und $z \in L$ ein primitiver isotroper Vektor der Stufe N. Ist $N = 1$ oder ist N gleich der Stufe von L, so existiert ein primitives isotropes $\zeta \in L$ der Stufe N mit $\langle z, \zeta\rangle = N$, so dass die von z und ζ erzeugte skalierte hyperbolische Ebene $II_{1,1}(N)$ orthogonal von L abspaltet.*

Beweis. Wir zeigen den Fall, dass N gleich der Stufe von L ist, da der Fall $N = 1$ analog geht. Wähle ein $z' \in L'$ mit $\langle z, z'\rangle = 1$. Wir wollen zunächst zeigen, dass man $q(z') = 0$ annehmen kann: Ist $q(z') \neq 0$, so betrachte den Vektor $z' - q(z')z = z' - Nq(z')z/N \in L'$. Dabei ist $Nq(z') \in \mathbb{Z}$, da L Stufe N hat, und $z/N \in L'$, da z Stufe N hat. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\langle z, z' - q(z')z\rangle &= \langle z, z'\rangle - q(z')\langle z, z\rangle = \langle z, z'\rangle = 1,\\ q(z' - q(z')z) &= \langle z', -q(z')z\rangle + q(z') + q(-q(z')z)\\ &= -q(z')\langle z', z\rangle + q(z') + q(z')^2 q(z) = 0.\end{aligned}$$

Daher können wir z' durch $z' - q(z')z$ ersetzen und ohne Einschränkung annehmen, dass $q(z') = 0$ gilt.

Setze nun $\zeta := Nz' \in L$. Dann ist ζ primitiv und isotrop mit $\langle z, \zeta\rangle = N$. Für $y \in L$ gilt $\langle \zeta, y\rangle = N\langle z', y\rangle \in N\mathbb{Z}$, d.h. ζ hat Stufe N. Es bezeichne $II_{1,1}(N)$ die von z und ζ erzeugte hyperbolische Ebene in L. Es gilt $\langle L, II_{1,1}(N)\rangle = N\mathbb{Z}$, da z und ζ beide Stufe N haben. Wir wollen zeigen, dass $II_{1,1}(N)$ orthogonal von L abspaltet, d.h. wir wollen ein Gitter $K \subseteq L$ finden mit

$$L = K \oplus II_{1,1}(N)$$

und $\langle K, II_{1,1}(N)\rangle = 0$. Dazu machen wir uns zunächst klar, dass $II_{1,1}(N) \otimes \mathbb{R}$ orthogonal von $L \otimes \mathbb{R}$ abspaltet: In $L \otimes \mathbb{R}$ kann man z und ζ zu einer Basis $z, \zeta, b_3, \dots, b_m$ fortsetzen. Ersetzt man b_i durch

$$\tilde{b}_i = b_i - \langle b_i, \zeta\rangle z/N - \langle b_i, z\rangle \zeta/N,$$

so stellt $z, \zeta, \tilde{b}_3, \dots, \tilde{b}_m$ weiterhin eine Basis von $L \otimes \mathbb{R}$ dar, und der von den $\tilde{b}_i$ aufgespannte Unterraum U von $L \otimes \mathbb{R}$ ist orthogonal zu $II_{1,1}(N) \otimes \mathbb{R}$. Wir können also $L \otimes \mathbb{R}$ als orthogonale direkte Summe

$$L \otimes \mathbb{R} = U \oplus (II_{1,1}(N) \otimes \mathbb{R})$$

schreiben. Wir wollen jetzt zeigen, dass

$$L = (U \cap L) \oplus II_{1,1}(N)$$

als orthogonale direkte Summe gilt. Es ist klar, dass die direkte Summe auf der rechten Seite orthogonal und in L enthalten ist. Daher ist nur zu zeigen, dass jedes $x \in L$ auch in $(U \cap L) \oplus II_{1,1}(N)$ liegt. Schreibe $x = a + b$ mit $a \in U$ und $b \in II_{1,1}(N) \otimes \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle b, h\rangle = \langle x - a, h\rangle = \langle x, h\rangle - \langle a, h\rangle = \langle x, h\rangle$$

für alle $h \in II_{1,1}(N)$, also

$$\langle b, II_{1,1}(N)\rangle = \langle x, II_{1,1}(N)\rangle.$$

Da $x \in L$ ist, gilt weiter

$$\langle b, II_{1,1}(N)\rangle = \langle x, II_{1,1}(N)\rangle \subseteq \langle L, II_{1,1}(N)\rangle = N\mathbb{Z}.$$

Schreiben wir $b = b_1 z + b_2 \zeta$ mit $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, so folgt also

$$b_1 = \langle b, \zeta\rangle / N \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad b_2 = \langle b, z\rangle / N \in \mathbb{Z}.$$

Das bedeutet $b \in II_{1,1}(N)$. Somit ist auch $a = x - b \in L$, also $a \in U \cap L$. $\square$

1.3 Diskriminantenformen

Für ein gerades Gitter L gilt offenbar $L \subseteq L'$. Wir können daher den Quotienten L'/L betrachten. Es gilt:

Satz 1.3.1. *Sei L ein gerades Gitter und L' das zu L duale Gitter. Der Quotient $\mathcal{L} = L'/L$ ist eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $|\mathcal{L}| = |\det(L)|$. Er heißt* Diskriminantengruppe *von L.*

Beweis. Wir zeigen $|L'/L| = |\det(L)|$: Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_m$ von L' und positive ganze Zahlen $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{Z}$, so dass $d_1 b_1, \dots, d_m b_m$ eine Basis von L ist. Daher haben wir einen Gruppenisomorphismus

$$L'/L \mapsto \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z}, \qquad \sum_{i=1}^m a_i b_i + L \mapsto (a_1 + d_1\mathbb{Z}, \dots, a_m + d_m\mathbb{Z}).$$

Sei $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m)$ und seien $G = (\langle d_i b_i, d_j b_j\rangle)$ und $B = (\langle b_i, b_j\rangle)$ Gram-Matrizen von L bzw. L'. Offenbar gilt $G = DBD$, also $\det(D)^2 = \det(G)\det(B)^{-1}$. Da G^{-1} eine Gram-Matrix von L' (bzgl. der zu $d_1 b_1, \dots, d_m b_m$ dualen Basis) ist, haben wir $\det(B) = \det(G^{-1})$ und damit $\det(D)^2 = \det(G)^2$. Es folgt $|L'/L| = \det(D) = |\det(G)| = |\det(L)|$. $\square$

Die quadratische Form q auf L induziert auf $\mathcal{L} = L'/L$ eine wohldefinierte Abbildung

$$Q : \mathcal{L} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad Q(x + L) = q(x) \mod 1.$$

Es gilt $Q(a\beta) = a^2 Q(\beta)$ für $a \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathcal{L}$, und die Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (x + L, y + L) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \mod 1$$

definiert eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Daher ist $\mathcal{L}$ ein Beispiel einer Diskriminantenform:

Definition 1.3.2. Eine *Diskriminantenform* ist eine endliche abelsche Gruppe D mit einer Abbildung $Q : D \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $Q(a\beta) = a^2 Q(\beta)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $\beta \in D$.
- Die Abbildung $(\beta, \gamma) = Q(\beta + \gamma) - Q(\beta) - Q(\gamma)$ definiert eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf D.

Die Abbildung Q heißt *endliche quadratische Form*. Die *Stufe von D* ist die kleinste natürliche Zahl N für die $NQ(\beta) = 0 \mod 1$ für alle $\beta \in D$ gilt.

Beispiel 1.3.3. Die Diskriminantengruppe der mit N skalierten hyperbolischen Ebene $II_{1,1}(N)$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

1.4 Jordan-Zerlegung von Diskriminantenformen

Wir wollen in diesem Abschnitt beschreiben, wie man eine Diskriminantenform in eine orthogonale direkte Summe kleinerer Diskriminantenformen, der sogenannten Jordan-Komponenten, zerlegen kann. Zuvor führen wir noch das Kronecker-Symbol wie in [Bor00] ein:

Definition 1.4.1. Sei p eine ungerade Primzahl und $m \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(m, p) = 1$. Wir definieren

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists z \in \mathbb{Z} \text{ mit } m \equiv z^2 \mod p, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen weiter

$$\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \equiv \pm 1 \mod 8, \\ -1, & \text{falls } m \equiv \pm 3 \mod 8, \end{cases}$$
$$\left(\frac{m}{-1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m > 0, \\ -1, & \text{falls } m < 0, \end{cases}$$
$$\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = \left(\frac{\pm 1}{0}\right) = 1.$$

Für $n = (-1)^a p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k} \in \mathbb{N}$ mit Primzahlen p_i und $m \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$ definieren wir das *Kronecker-Symbol* durch

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{-1}\right)^a \left(\frac{m}{p_1}\right)^{e_1} \cdots \left(\frac{m}{p_k}\right)^{e_k}.$$

Außerdem setzen wir $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$ falls $\operatorname{ggT}(n, m) \neq 1$.

Das Kronecker-Symbol ist multiplikativ in m und n, d.h. es gilt

$$\left(\frac{ab}{cd}\right) = \left(\frac{a}{cd}\right)\left(\frac{b}{cd}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt für zwei verschiedene ungerade Primzahlen p, q das sogenannte quadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Sei nun D eine Diskriminantenform mit endlicher quadratischer Form Q und zugehöriger endlicher Bilinearform $(\cdot,\cdot)$. Da D eine endliche Gruppe ist, können wir D als direkte Summe ihrer p-Komponenten

$$\{\gamma \in D : p^m\gamma = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\}$$

für Primzahlen p schreiben. Diese Zerlegung ist sogar orthogonal, da wir für $\beta, \gamma \in D$ der Ordnungen p^m und q^n zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ap^m + bq^n = 1$ wählen können, so dass

$$(\beta, \gamma) = (ap^m + bq^n)(\beta, \gamma) = a(p^m\beta, \gamma) + b(\beta, q^n\gamma) = 0$$

gilt. Es folgt, dass Q auf den p-Komponenten nicht-ausgeartet ist, d.h. die p-Komponenten von D sind Diskriminantenformen.

Weiter zerfällt nun jede p-Komponente in eine orthogonale direkte Summe von Diskriminantenformen, die isomorph sind zu $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^n$ für geeignete $r, n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $q^{\pm n}$ mit $q = p^r$ für eine solche Diskriminantenform und nennen sie eine p-adische Jordan-Komponente vom Exponenten q und Rang n. Das Vorzeichen im Exponenten wird weiter unten erklärt. Jede der Komponenten $q^{\pm n}$ kann weiter zerlegt werden in eine orthogonale direkte Summe unzerlegbarer Jordan-Komponenten vom Exponenten q. Wir zitieren hier die möglichen Jordan-Komponenten aus [Sch06] (siehe auch [CS99] für Details):

- Sei $q > 1$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl p. Die nicht-trivialen p-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind $q^{\pm n}$ mit $n \geq 1$. Die unzerlegbaren p-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind gegeben durch $q^{\pm 1}$. Sie werden erzeugt von einem Element γ der Ordnung q mit $Q(\gamma) = j/q \mod 1$, wobei j eine ganze Zahl ist mit $\left(\frac{2j}{p}\right) = \pm 1$. Diese Komponenten haben Stufe q.

- Sei $q > 1$ eine Potenz von 2. Die nicht-trivialen geraden 2-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind $q^{\pm 2n} = q_{II}^{\pm 2n}$ mit $n \geq 1$. Die unzerlegbaren geraden 2-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind gegeben durch $q_{II}^{\pm 2}$. Sie werden erzeugt von zwei Elementen β und γ der Ordnung q mit $(\beta, \gamma) = 1/q \mod 1$ und $Q(\beta) = Q(\gamma) = 0 \mod 1$ für q^{+2} und $Q(\beta) = Q(\gamma) = 1/q \mod 1$ für q^{-2}. Diese Komponenten haben Stufe q.

- Sei $q > 1$ eine Potenz von 2. Die nicht-trivialen ungeraden 2-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind $q_t^{\pm n}$ mit $n \geq 1$ und $t \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Die unzerlegbaren ungeraden 2-adischen Jordan-Komponenten vom Exponenten q sind

$q_t^{\pm 1}$ mit $\left(\frac{t}{2}\right) = \pm 1$. Sie werden erzeugt von einem Element γ der Ordnung q mit $Q(\gamma) = t/2q \mod 1$. Diese Komponenten haben Stufe $2q$.

Die Summe zweier Jordan-Komponenten vom selben Exponenten q erhält man durch Addieren der Ränge, Multiplizieren der Vorzeichen im Exponenten und Addieren der Indizes t, falls vorhanden.

1.5 Gitter von Primzahlstufe

Sei L ein gerades Gitter von Primzahlstufe p. Nach Satz 1.2.4 gilt dann $pL' \subseteq L$, d.h. alle Elemente der Diskriminantengruppe L'/L haben Ordnung 1 oder p. Es folgt:

Satz 1.5.1. *Sei L ein gerades Gitter von Primzahlstufe p. Dann gilt $L'/L \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$.*

Daher besitzt L in diesem Fall nur die p-adische Jordan-Komponente $p^{\epsilon_p \ell}$ vom Exponenten p, wobei $\epsilon_p \in \{\pm 1\}$. Für $p = 2$ können außerdem nur gerade 2-adische Jordan-Komponenten auftreten, da ungerade 2-adische Jordan-Komponenten mindestens Stufe 4 haben. Insbesondere ist ℓ im Fall $p = 2$ gerade.

Wir wollen das Vorzeichen ϵ_p genauer bestimmen. Dazu geben wir zunächst den Wert der Gauß-Summe $G(n, L) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} e(nQ(\gamma))$ des Gitters L an, wobei $e(z) = e^{2\pi i z}$.

Satz 1.5.2. *Sei L ein gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-), Signatur $r = b^+ - b^-$ und Primzahlstufe p. Sei $\mathcal{L} = L'/L = p^{\epsilon_p \ell}$ die Diskriminantengruppe von L. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$G(n, L) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} e(nQ(\gamma)) = \begin{cases} p^\ell, & \text{falls } p \mid n, \\ \epsilon_2 2^{\ell/2}, & \text{falls } p \nmid n \text{ und } p = 2, \\ \left(\frac{2n}{p}\right)^\ell \epsilon_p p^{\ell/2}, & \text{falls } p \nmid n \text{ und } p \equiv 1 \mod 4, \\ \left(\frac{2n}{p}\right)^\ell \epsilon_p p^{\ell/2} i^\ell, & \text{falls } p \nmid n \text{ und } p \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Weiter gilt $\epsilon_2 = (-1)^{r/4}$ und

$$\epsilon_p = \begin{cases} \left(\frac{2}{p}\right)^\ell (-1)^{r/4}, & \text{falls } p \equiv 1 \mod 4, \\ \left(\frac{2}{p}\right)^\ell (-1)^{(r-2\ell)/4}, & \text{falls } p \equiv 3 \mod 4, \end{cases}$$

für $p \neq 2$. Insbesondere ist die Signatur r gerade.

Beweis. Die Berechnung der Gauß-Summen findet sich in [Sch09], Proposition 3.9. Die Werte von ϵ_p ergeben sich dann aus der Formel von Milgram $G(1, L) = \sqrt{|\mathcal{L}|} e(r/8)$. $\square$

Da $\epsilon_p \in \{\pm 1\}$ ist, liefert der letzte Satz Einschränkungen an die Existenz eines geraden Gitters mit vorgegebener Signatur r und Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell$: für $p = 2$ und $p \equiv 1 \mod 4$ muss die Signatur durch 4 teilbar sein, und für $p \equiv 3 \mod 4$ muss $r - 2\ell \equiv 0 \mod 4$ gelten, d.h. ℓ ist genau dann gerade, wenn r durch 4 teilbar ist.

2 Elliptische Modulformen zu Kongruenzuntergruppen

In diesem Kapitel wollen wir elliptische Modulformen zu Kongruenzuntergruppen erklären. Diese sind für uns wichtig, da einerseits die Komponentenfunktionen vektorwertiger Modulformen solche elliptischen Modulformen sind und wir umgekehrt vektorwertige Modulformen als Anhebungen elliptischer Modulformen konstruieren wollen. Die meisten Definitionen und Sätze in diesem Kapitel sind wohlbekannt und stammen zu großen Teilen aus den Büchern [DS05] und [KK07], daher haben wir einige Beweise ausgelassen.

Die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) : \det(M) = 1\}$$

wird erzeugt von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ durch Möbiustransformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Unter einer holomorphen Modulform für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ verstehen wir eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, die für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ die Gleichung

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau) \tag{2.1}$$

erfüllt und holomorph in ∞ ist, also für $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$ beschränkt ist. Wir wollen diese Anforderungen an f lockern und statt (2.1) verlangen, dass

$$f(L\tau) = \chi(L)(c\tau + d)^k f(\tau)$$

nur für Matrizen L aus einer Untergruppe Λ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gelten soll, wobei χ ein unitärer Charakter von Λ ist. Die dazu nötigen Begriffe führen wir im Folgenden ein.

2.1 Kongruenzuntergruppen

Definition 2.1.1. Für $N \in \mathbb{N}$ ist die *Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N* definiert als

$$\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : M \equiv I \mod N\}.$$

Dabei bezeichnet I die Einheitsmatrix und die Kongruenz von Matrizen ist komponentenweise zu verstehen. Eine Untergruppe Λ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ heißt *Kongruenzuntergruppe der Stufe* N, falls $\Gamma(N) \subseteq \Lambda$ gilt.

Wichtige Beispiele für Kongruenzuntergruppen der Stufe N sind

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \bmod N, a \equiv d \equiv 1 \bmod N \right\},$$
$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \bmod N \right\}.$$

Es gelten die Inklusionen $\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N)$, also sind $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$ tatsächlich Kongruenzuntergruppen.

Satz 2.1.2. *Jede Kongruenzuntergruppe hat endlichen Index in* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*. Für* $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ *und* $\Gamma_0(N)$ *gelten die folgenden Index-Formeln:*

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$
$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] = N^2 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$
$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Die Produkte laufen über alle Primzahlen p*, die* N *teilen.*

Beweis. Sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ ist der Kern des surjektiven Homomorphismus

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad M \mapsto \overline{M},$$

wobei die Einträge von $\overline{M}$ modulo N reduziert sind. Daher ist $\Gamma(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ isomorph zur endlichen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Es folgt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Lambda] \leq [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| < \infty.$$

Für die Index-Formeln siehe [DS05], Abschnitt 1.2. □

Definition 2.1.3. Die Menge der *Spitzen* von $\mathbb{H}$ ist $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, wobei wir $\frac{a}{0}$ für $a \neq 0$ mit ∞ identifizieren. Jede Kongruenzuntergruppe Λ wirkt auf den Spitzen durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{m}{n} = \frac{am + nb}{cm + nd}.$$

Die Bahnen unter dieser Wirkung heißen *Spitzenbahnen von* Λ.

Mit der obigen Definition gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = \begin{cases} \infty, & \text{falls } c = 0, \\ \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0. \end{cases}$$

Man kann für jede Spitze $s = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit $(a, c) = 1$ eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wählen, so dass also $s = M\infty$ gilt. Insbesondere ist die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf den Spitzen transitiv, d.h. für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es nur eine Spitzenbahn, die wir ebenfalls ∞ nennen. Allgemeiner gilt:

Satz 2.1.4. *Jede Kongruenzuntergruppe Λ besitzt nur endlich viele Spitzenbahnen. Für $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ gelten die folgenden Formeln für die Anzahlen ε_∞ der Spitzenbahnen:*

$$\varepsilon_\infty(\Gamma(N)) = \begin{cases} 3, & \textit{falls } N = 2, \\ \frac{1}{2} N^2 \prod_{p \mid N} (1 - 1/p^2), & \textit{falls } N > 2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_\infty(\Gamma_1(N)) = \begin{cases} 2, & \textit{falls } N = 2, \\ 3, & \textit{falls } N = 4, \\ \frac{1}{2} \sum_{d \mid N} \phi(d)\phi(N/d), & \textit{falls } N = 3 \textit{ oder } N > 4, \end{cases}$$

$$\varepsilon_\infty(\Gamma_0(N)) = \sum_{d \mid N} \phi(\mathrm{ggT}(d, N/d)).$$

Dabei ist ϕ die Eulersche ϕ-Funktion, die für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen kleiner als n angibt. Das Produkt läuft über alle Primzahlen p, die N teilen und die Summen laufen über alle positiven Teiler d von N.

Beweis. Sind $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ unter Λ äquivalent, d.h. $M = LM'$ für ein $L \in \Lambda$, so sind auch die Spitzen $M\infty$ und $M'\infty$ unter Λ äquivalent. Da sich jede Spitze $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ als $s = M\infty$ für eine Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben lässt, ist die Anzahl der Spitzenbahnen durch $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Lambda]$ beschränkt, insbesondere also endlich.

Die Formeln für ε_∞ finden sich in [DS05], Abschnitt 3.8. □

Definition 2.1.5. Sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Ein *unitärer Charakter χ mod N von Λ* ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : \Gamma \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (also $\chi(MK) = \chi(M)\chi(K)$ für alle $M, K \in \Lambda$) mit $\chi(M) = 1$ für alle $M \in \Gamma(N)$.

Satz 2.1.6. *Sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Jeder Charakter χ mod N von Λ hat endliche Ordnung.*

Beweis. Sei $m = [\Lambda : \Gamma(N)]$. Für $L \in \Lambda$ gilt $\Gamma(N)L^m = (\Gamma(N)L)^m = \Gamma(N)$ im Quotienten $\Gamma(N) \setminus \Lambda$, also $L^m \in \Gamma(N)$. Es folgt $\chi(L)^m = \chi(L^m) = 1$ für alle $L \in \Lambda$. □

2.2 Modulformen zu Kongruenzuntergruppen

Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ definieren wir den Automorphiefaktor

$$j(M, \tau) = c\tau + d.$$

Man rechnet leicht nach, dass dann

$$j(MN, \tau) = j(M, N\tau) \cdot j(N, \tau)$$

für $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt. Ist $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so erklären wir für $k \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine holomorphe Funktion $f|_M$ durch

$$f|_M(\tau) = j(M, \tau)^{-k} f(M\tau).$$

Eine elementare Rechnung zeigt die nützliche Regel

$$f|_{MN} = (f|_M)|_N$$

für $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Definition 2.2.1. Sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Weiter sei $k \in \mathbb{Z}$ und χ ein Charakter mod N von Λ. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *fast holomorphe Modulform zu Λ vom Gewicht k und Charakter χ*, falls gilt:

1. f ist holomorph auf $\mathbb{H}$,
2. $f|_L = \chi(L) f$ für alle $L \in \Lambda$,
3. $f|_M$ hat für jedes $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f|_M(\tau) = \sum_{n=n_M}^{\infty} a_n(M) e^{2\pi i n\tau/N}$$

mit $a_n(M) \in \mathbb{C}$ und $n_M \in \mathbb{Z}$.

Ist $n_M \geq 0$ (bzw. $n_M > 0$) für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so heißt f *holomorphe Modulform* (bzw. *Spitzenform*).

Die *Ordnung* $\mathrm{ord}_\tau(f)$ *von f in $\tau \in \mathbb{H}$* ist definiert als die eindeutig bestimmte Zahl n für die die Funktion $(\tau - z)^{-n} f(z)$ holomorph in τ ist, aber in τ nicht verschwindet.

Für eine Spitze $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ wählen wir eine Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\infty = s$ und setzen $\mathrm{ord}_s(f) = n_M/N$, wobei n_M den kleinste Index bezeichnet, für den $a_n(M) \neq 0$ ist in der Fourier-Entwicklung von $f|_M$.

Den Raum der fast holomorphen Modulformen zu Λ vom Gewicht k und Charakter χ bezeichnen wir mit $M_k^!(\Lambda, \chi)$, den Raum der holomorphen Modulformen mit $M_k(\Lambda, \chi)$ und den Raum der Spitzenformen mit $S_k(\Lambda, \chi)$.

Beachte, dass wir im Gegensatz zur üblichen Definition einer Modulform Pole in den Spitzen zulassen.

Der folgende Satz impliziert, dass es genügt, die Bedingung aus Punkt 3 der Definition einer Modulform für die endlich vielen Vertreter der Spitzenbahnen von Λ zu überprüfen:

Satz 2.2.2. *Sei $f \in M_k^!(\Lambda, \chi)$ eine Modulform und seien $s, t \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ zwei Spitzen, die in der selben Spitzenbahn von Λ liegen. Dann gilt $\mathrm{ord}_s(f) = \mathrm{ord}_t(f)$.*

Beweis. Seien $M_s, M_t \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_s\infty = s$ und $M_t\infty = t$. Nach Annahme gibt es ein $L \in \Lambda$ mit $s = Lt$. Zusammen gilt $LM_t\infty = s = M_s\infty$. Dann gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $LM_t = \pm M_s T^\ell$. Es folgt

$$f|_{M_s}(\tau) = f|_{\pm LM_tT^{-\ell}}(\tau) = (\pm 1)^{-k}\chi(L)f|_{M_tT^{-\ell}}(\tau) = (\pm 1)^{-k}\chi(L)f|_{M_t}(\tau - \ell).$$

Damit beginnen die Fourier-Entwicklungen von $f|_{M_s}$ und $f|_{M_t}$ mit dem selben Index $n_{M_s} = n_{M_t}$, d.h. $\mathrm{ord}_s(f) = \mathrm{ord}_t(f)$. □

Der Beweis des letzten Satzes zeigt auch, dass die Ordnung $\mathrm{ord}_s(f)$ in einer Spitze s wohldefiniert ist, also nicht von der Matrix M mit $M\infty = s$ abhängt.

Wie im Falle holomorpher Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kann es keine nicht-trivialen holomorphen Modulformen zu Kongruenzuntergruppen negativen Gewichts geben.

Satz 2.2.3. *Für $k < 0$ gilt $M_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$.*

Beweis. Wir skizzieren den Beweis aus [KK07], Kapitel 3, §7, Satz 4: Sei $f \in M_k(\Lambda, \chi)$. Da χ endliche Ordnung hat, ist $g = f^m$ für ein $m > 0$ eine Modulform zu Λ vom Gewicht $mk < 0$ und trivialem Charakter. Dann ist die Funktion

$$h = \prod_{M \in \Lambda \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g|_M$$

(wobei das Produkt über ein beliebiges Repräsentantensystem von $\Lambda \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ läuft) eine holomorphe Modulform negativen Gewichts zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und verschwindet daher identisch. Mit dem Identitätssatz folgt $g = 0$ und somit $f = 0$. □

Allerdings kann es auch für negatives Gewicht k nicht-triviale Modulformen $f \in M_k^!(\Lambda, \chi)$ geben. Der letzte Satz zeigt, dass f in diesem Fall in mindestens einer Spitze einen Pol haben muss. Beispiele solcher Modulformen sind Eta-Produkte, die wir in einem späteren Abschnitt einführen.

Im Gegensatz zum $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Fall kann es aber holomorphe Modulformen zu Kongruenzuntergruppen von *ungeradem* positiven Gewicht geben, zum Beispiel Theta-Reihen zu Gittern:

Beispiel 2.2.4. Sei L ein gerades Gitter mit einer positiv definiten quadratischen Form q. Dann definieren wir die Theta-Reihe zu L durch

$$\Theta_L(\tau) = \sum_{x \in L} e^{2\pi i \tau q(x)}.$$

Die Theta-Reihe konvergiert auf $\mathbb{H}$ normal und stellt daher eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ dar (siehe [KK07], Kapitel 5, §2, Lemma 1).

Ist der Rang m von L gerade und $N > 1$ die Stufe von N, so ist die Theta-Reihe Θ_L eine holomorphe Modulform zu $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht $k = m/2$ und dem quadratischen Charakter

$$\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{(-1)^{m/2}\det(L)}{d}\right).$$

Zum Beweis siehe [Ebe02], Theorem 3.2.

Wir betrachten nun speziell das Gitter $A_2 = (\mathbb{Z}^2, q)$ mit der quadratischen Form $q(x,y) = x^2 - xy + y^2$. Seine Gram-Matrix ist $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. es hat Stufe 3 und seine Diskriminantengruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Die Theta-Reihe

$$\Theta_{A_2}(\tau) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi i\tau(x^2-xy+y^2)} = 1 + 6q + 6q^3 + 6q^4 + 12q^7 + 6q^9 + \ldots$$

ist eine holomorphe Modulform zu $\Gamma_0(3)$ vom Gewicht 1 und Charakter

$$\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{-3}{d}\right) = \left(\frac{d}{3}\right).$$

Insbesondere ist Θ_{A_2} eine holomorphe Modulform zu $\Gamma_1(3)$ von Gewicht 1 und trivialem Charakter.

2.3 Die Gewichtsformel

Für nicht-triviale holomorphe Modulformen $f \neq 0$ zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ gilt die bekannte *Gewichtsformel* (oder auch $\frac{k}{12}$*-Formel*)

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{\tau\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \frac{2}{|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\tau|}\,\mathrm{ord}_\tau(f) = \frac{k}{12},$$

die Auskunft über Null- und Polstellen von f gibt und in vielen Fällen Rückschlüsse über die Struktur der Vektorräume $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ holomorpher Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erlaubt. Die Formel ist auch richtig, wenn f Pole in $\mathbb{H}$ und ∞ besitzt (siehe [KK07]). Für Modulformen zu Kongruenzuntergruppen kann man ebenfalls eine Gewichtsformel angeben:

Satz 2.3.1. *Sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N, $k \in \mathbb{Z}$ und χ ein Charakter mod N von Λ. Ist $f \in M_k^!(\Lambda,\chi), f \neq 0$, eine nicht-triviale Modulform, so gilt die Gewichtsformel*

$$\sum_{s\in\Lambda\backslash(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_s : \pm\Lambda_s]\,\mathrm{ord}_s(f) + \sum_{\tau\in\Lambda\backslash\mathbb{H}} \frac{2}{|\pm\Lambda_\tau|}\,\mathrm{ord}_\tau(f) = \frac{k}{12}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \pm\Lambda].$$

Dabei ist $\pm\Lambda = \Lambda \cup (-\Lambda)$, und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_s$ bzw. $\pm\Lambda_s$ bezeichnen den Stabilisator von s in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bzw. $\pm\Lambda$. Die Summen laufen über vollständige Vertretersysteme der Bahnenräume $\Lambda \setminus (\mathbb{Q}\cup\{\infty\})$ bzw. $\Lambda\setminus\mathbb{H}$.

Beweis. Die Formel findet sich in ähnlicher Form in [HBJ94], Anhang I, Abschnitt 4, allerdings nur für holomorphe Modulformen f. Hat f Pole in den Spitzen, so kann man f mit einer geeigneten Potenz der Diskriminante Δ (der eindeutig bestimmten normierten Spitzenform zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht 12) multiplizieren, bis $f\Delta^r$ holomorph in den Spitzen ist, und die Gewichtsformel für holomorphe Modulformen dann auf $f\Delta^r$ anwenden. Daraus erhält man die Gewichtsformel für f.

Wir geben noch eine Beweisidee an, die auf der Gewichtsformel für Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beruht:

Da χ endliche Ordnung hat können wir ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\chi^m = 1$ wählen. Für $f \in M_k^!(\Lambda, \chi)$ ist $g = f^{2m} \in M_{2mk}^!(\Lambda, 1)$ eine Modulform von geradem Gewicht und trivialem Charakter. Nun ist die Funktion

$$h = \prod_{M \in \pm\Lambda \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g|_M$$

eine Modulform zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $2mk[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \pm\Lambda]$, die möglicherweise Pole in $\mathbb{H}$ und ∞ hat (damit h wohldefiniert ist, muss das Gewicht von g gerade sein). Wir können also die Gewichtsformel für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf h anwenden. Mit $\mathrm{ord}_\sigma(f^{2m}) = 2m\,\mathrm{ord}_\sigma(f)$ für $\sigma \in \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ und einer etwas technischen Rechnung folgt daraus die im Satz angegebene Formel. □

Bemerke, dass die Gewichtsformel nicht vom Charakter χ abhängt.

Definition 2.3.2. Für $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ heißt $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_s : \pm\Lambda_s]$ die *Weite der Spitze s bezüglich* Λ. Einen Punkt $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\frac{2}{|\pm\Lambda_\tau|} \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ nennen wir *elliptischen Punkt von* Λ *der Ordnung* 2 *bzw.* 3.

Zum Beispiel besitzt $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die elliptischen Punkte i der Ordnung 2 und $\rho = e^{2\pi i/3}$ der Ordnung 3. Die Spitze ∞ hat Weite 1 bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Da wir die Gewichtsformel später für Modulformen zu $\Gamma_1(2)$ und $\Gamma_1(3)$ benutzen wollen, geben wir sie für diese Fälle etwas genauer an. Dafür brauchen wir die Weiten der Spitzen und die elliptischen Punkte von $\Gamma_1(N)$.

Satz 2.3.3. *Sei $N \in \mathbb{N}, N > 1$. Die Spitze $\frac{1}{2}$ von $\Gamma_1(4)$ hat Weite 1. Ansonsten ist die Weite einer Spitze $s = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bzgl. $\Gamma_1(N)$ gegeben durch*

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_s : \pm\Gamma_1(N)_s] = \frac{N}{\mathrm{ggT}(c, N)}.$$

Weiter gilt

a) $\Gamma_1(2)$ *hat den elliptischen Punkt* $\rho_2 := \frac{1+i}{2}$ *der Ordnung* 2.

b) $\Gamma_1(3)$ *hat den elliptischen Punkt* $\rho_3 := \frac{\rho+1}{\rho+2}$ *der Ordnung* 3.

d) $\Gamma_1(N)$ *hat für* $N > 3$ *keine elliptischen Punkte.*

Beweis. Sei $s = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Definiere $T_{a/c} := MTM^{-1}$, wobei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist mit $M\infty = \frac{a}{c}$. Dann ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_s = \{\pm T_{a/c}^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Weiter wird $\Gamma_1(N)_s$ erzeugt von $T_{a/c}^t$ oder $-T_{a/c}^t$ für das minimale $t \in \mathbb{N}$ mit $T_{a/c}^t \in \Gamma_1(N)$ oder $-T_{a/c}^t \in \Gamma_1(N)$. Dieses t ist genau die Weite der Spitze s. Aus

$$T_{a/c}^t = MT^tM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - act & a^2t \\ -c^2t & 1 + act \end{pmatrix}$$

folgen leicht die im Satz angegebenen Werte für t.

Nehmen wir an, $\tau \in \mathbb{H}$ ist ein elliptischer Punkt von $\Gamma_1(N)$ der Ordnung 2. Dann ist $\Gamma_1(N)_\tau$ konjugiert zum Stabilisator $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_i = \langle S \rangle$ von i, d.h. es gibt eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\tau = Mi$ und $\Gamma_1(N)_\tau = \langle MSM^{-1} \rangle$. Wir haben also

$$MSM^{-1} = \begin{pmatrix} ac + bd & -a^2 - b^2 \\ c^2 + d^2 & -ac - bd \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N).$$

Für $N > 2$ können aber $-ac - bd \equiv 1 \mod N$ und $ac + bd \equiv 1 \mod N$ nicht gleichzeitig gelten, also gibt es für $N > 2$ keine elliptischen Punkte der Ordnung 2. Für $N = 2$ können wir z.B. $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ wählen und erhalten den elliptischen Punkt $\rho_2 := Mi = \frac{i}{i+1} = \frac{1+i}{2}$.

Aus $MSM^{-1} \in \Gamma_1(2)$ können wir folgern, dass c und d beide ungerade sind und dass genau eine der beiden Zahlen a, b gerade ist. Sind τ_1, τ_2 zwei elliptische Punkte von $\Gamma_1(2)$ der Ordnung 2 mit $M_1 i = \tau_1, M_2 i = \tau_2$, so ist $M_1 M_2^{-1} \tau_2 = \tau_1$ und aus den eben genannten Relationen für a, b, c, d folgt, dass $M_1 M_2^{-1} \in \Gamma_1(2)$ ist. Damit besitzt $\Gamma_1(2)$ nur eine Bahn elliptischer Punkte der Ordnung 2. Wir können ρ_2 als Vertreter wählen.

Analog argumentiert man für die elliptischen Punkte der Ordnung 3. Hier ist $\Gamma_1(N)_\tau$ konjugiert zum Stabilisator $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\rho = \langle ST \rangle$. Man erhält den elliptischen Punkt $\rho_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \rho = \frac{\rho+1}{\rho+2}$ der Ordnung 3 für $\Gamma_1(3)$. □

Mit dem letzten Satz und den Index-Formeln für $\Gamma_1(N)$ aus Satz 2.1.2 erhalten wir die Gewichtsformel für nicht-triviale Modulformen zu $\Gamma_1(2)$ als

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + 2\,\mathrm{ord}_0(f) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ord}_{\rho_2}(f) + \sum_{\substack{\tau \in \Gamma_1(2)\backslash\mathbb{H} \\ \tau \not\equiv \rho_2 \bmod \Gamma_1(2)}} \mathrm{ord}_\tau(f) = \frac{k}{4}, \tag{2.2}$$

und für $\Gamma_1(3)$ als

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + 3\,\mathrm{ord}_0(f) + \frac{1}{3}\,\mathrm{ord}_{\rho_3}(f) + \sum_{\substack{\tau \in \Gamma_1(3)\backslash\mathbb{H} \\ \tau \not\equiv \rho_3 \bmod \Gamma_1(3)}} \mathrm{ord}_\tau(f) = \frac{k}{3}. \tag{2.3}$$

2.4 Eta-Produkte für $\Gamma_1(N)$

Wir wollen in diesem Abschnitt Modulformen zu $\Gamma_1(N)$ durch Produkte und Quotienten der Dedekindschen Eta-Funktion

$$\eta(\tau) = e(\tau/24) \prod_{n \geq 1} (1 - e(n\tau))$$

konstruieren, wobei wir $e(z) = e^{2\pi i z}$ abkürzen. Die Eta-Funktion ist holomorph auf $\mathbb{H}$, hat dort keine Nullstellen und transformiert unter T und S als

$$\eta(\tau+1) = e(1/24)\eta(\tau), \qquad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\eta(\tau),$$

siehe [KK07]. Allgemeiner haben wir nach Rademacher (siehe [Rad73, S. 163]) für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $c > 0$ das Transformationsverhalten

$$\eta(M\tau) = \varepsilon(M)\sqrt{c\tau + d}\,\eta(\tau)$$

mit

$$\varepsilon(M) = \begin{cases} \left(\dfrac{d}{c}\right) e\big((-3c + bd(1-c^2) + c(a+d))/24\big), & \text{falls } c \text{ ungerade,} \\ \left(\dfrac{c}{d}\right) e\big((3d - 3 + ac(1-d^2) + d(b-c))/24\big), & \text{falls } c \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir geben nun zunächst ein einfaches Erzeugendensystem für $\Gamma_1(N)$ an:

Lemma 2.4.1. *Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl. Die Gruppe $\Gamma_1(N)$ wird erzeugt von den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$ mit $c > 0, d > 0$ und $d \equiv 1 \mod 4$.*

Beweis. Wir wiederholen den Beweis von Lemma 5.1 aus [Bor00] für $\Gamma_1(N)$: Sei Λ die von den oben genannten Matrizen erzeugte Untergruppe von $\Gamma_1(N)$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$. Wir zeigen, dass $M \in \Lambda$ ist, indem wir M solange von rechts mit geeigneten Matrizen aus Λ multiplizieren, bis das Ergebnis selbst in Λ liegt.

Zunächst gilt $T \in \Lambda$, da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4N & 1+4N \end{smallmatrix}\right)$ und $T\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4N & 1+4N \end{smallmatrix}\right)$ in Λ liegen. Falls d gerade ist, muss c ungerade sein und wir können M von rechts mit T multiplizieren um d ungerade zu machen.

Wir wollen nun $d \equiv 1 \mod 4$ erreichen: Wenn $4 \mid N$ gilt, so ist $d \equiv 1 \mod 4$ automatisch erfüllt. Gilt andernfalls $4 \nmid N$ und ist c durch 4 teilbar, so multiplizieren wir von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so dass c nicht mehr durch 4 teilbar ist. Anschließend multiplizieren wir von rechts mit einer geeigneten Potenz von T, bis $d \equiv 1 \mod 4$ gilt.

Jetzt multiplizieren wir noch von rechts mit einer geeigneten Potenz von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4N & 1 \end{smallmatrix}\right)$, um c positiv zu machen, ohne d zu verändern, und danach mit einer geeigneten Potenz von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, um d positiv zu machen, ohne c und $d \mod 4$ zu verändern. Das Ergebnis liegt nun in der Menge der erzeugenden Elemente, also in Λ. Es folgt $M \in \Lambda$ und $\Lambda = \Gamma_1(N)$. □

Das folgende Theorem ist eine leichte Abwandlung des Theorems 6.2 aus [Bor00], in dem Eta-Produkte zu $\Gamma_0(N)$ behandelt werden. Da die Voraussetzungen für den Fall $\Gamma_1(N)$ etwas angepasst werden müssen, geben wir den Beweis hier an.

Theorem 2.4.2. *Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl und seien $r_\delta \in \mathbb{Z}$ für $\delta \mid N$ ganze Zahlen, so dass $\frac{N}{24}\sum_{\delta|N} r_\delta \delta$ und $\frac{N}{24}\sum_{\delta|N} r_\delta/\delta$ ganzzahlig sind und $\sum_{\delta|N} r_\delta$ gerade ist. Dann ist das Eta-Produkt*

$$\prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{r_\delta}$$

eine Modulform zu $\Gamma_1(N)$ vom Gewicht $k = \sum_{\delta|N} r_\delta/2$ und Charakter

$$\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e\left(\frac{b}{24}\sum_{\delta|N} r_\delta \delta\right).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass das Eta-Produkt korrekt unter den in Lemma 2.4.1 genannten Erzeugern von $\Gamma_1(N)$ transformiert. Sei also $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$ mit $c > 0, d > 0$ und $d \equiv 1 \mod 4$. Beachte, dass für $\delta \mid N$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$ gilt:

$$\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} a & b\delta \\ c/\delta & d \end{pmatrix} (\delta\tau).$$

Nehmen wir zunächst an, dass c ungerade ist. Nach der Formel von Rademacher transformiert das Eta-Produkt als Modulform zu $\Gamma_1(N)$ vom Gewicht $k = \sum_{\delta|N} r_\delta/2$ und folgendem Charakter:

$$\begin{aligned} &\prod_{\delta|N} \left(\frac{d}{c/\delta}\right)^{r_\delta} e((-3c/\delta + b\delta d(1 - c^2/\delta^2) + c/\delta(a+d))/24)^{r_\delta} \\ &= \left(\frac{d}{c}\right)^{2k} \prod_{\delta|N} \left(\frac{d}{\delta}\right)^{r_\delta} e\left(\left(bd\sum_{\delta|N} r_\delta\delta + (a + d - bdc - 3)c\sum_{\delta|N} r_\delta/\delta\right)/24\right). \end{aligned}$$

Wir können nun noch einige Terme vereinfachen: Zunächst ist $c\sum_{\delta|N} r_\delta/\delta \equiv 0 \mod 24$ wegen $c \equiv 0 \mod N$. Weiter ist $\left(\frac{d}{c}\right)^{2k} = 1$ da $2k$ gerade ist, und $\left(\frac{d}{\delta}\right) = 1$ da $d \equiv 1 \mod \delta$ für $\delta \mid N$. Mit $d \equiv 1 \mod N$ ergibt sich der Charakter χ.

Sei nun c gerade. Dann transformiert das Eta-Produkt mit dem Charakter

$$\begin{aligned} &\prod_{\delta|N} \left(\frac{c/\delta}{d}\right)^{r_\delta} e((3d - 3 + a(c/\delta)(1 - d^2) + d(b\delta - c/\delta))/24)^{r_\delta} \\ &= \left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \prod_{\delta|N} \left(\frac{\delta}{d}\right)^{r_\delta} e\left(\left(bd\sum_{\delta|N} r_\delta\delta + (a - d - ad^2)c\sum_{\delta|N} r_\delta/\delta + 3(d-1)\sum_{\delta|N} r_\delta\right)/24\right). \end{aligned}$$

Wie oben ist $c\sum_{\delta|N} r_\delta/\delta \equiv 0 \mod 24$ wegen $c \equiv 0 \mod N$ und $\left(\frac{c}{d}\right)^{2k} = 1$. Weiter gilt $3(d-1)\sum_{\delta|N} r_\delta \equiv 0 \mod 24$, da $d \equiv 1 \mod 4$ und $\sum_{\delta|N} r_\delta = 2k$ gerade ist. Außerdem gilt $\left(\frac{\delta}{d}\right) = \left(\frac{d}{\delta}\right)$ für $d \equiv 1 \mod 4$ (was man z.B. mithilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes nachrechnen kann), und $\left(\frac{d}{\delta}\right) = 1$ wegen $d \equiv 1 \mod \delta$ für $\delta \mid N$. Wir erhalten auch in diesem Fall den Charakter χ. $\square$

Wir geben zwei Beispiele von Eta-Produkten zu $\Gamma_1(2)$ und $\Gamma_1(3)$ an, die wir später benutzen wollen. Beachte dazu, dass $\Gamma_1(2)$ und $\Gamma_1(3)$ jeweils 2 Spitzenbahnen haben, die wir als 0 und ∞ wählen können. Für eine Modulform f zu $\Gamma_1(2)$ bzw. $\Gamma_1(3)$ ist $f|_S$ eine Darstellung von f in der Spitze 0.

Beispiel 2.4.3. Das Eta-Produkt

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)^3}$$

ist eine Modulform zu $\Gamma_1(3)$ vom Gewicht -1 und Charakter $\chi(M) = e(-b/3)$. Anhand der Darstellung

$$f|_S(\tau) = 3\sqrt{3}i\frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/3)^3}$$

kann man ablesen, dass die Ordnungen in den Spitzen durch $\mathrm{ord}_\infty(f) = -1/3$ und $\mathrm{ord}_0(f) = 0$ gegeben sind.

Beispiel 2.4.4. Das Eta-Produkt

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^8}$$

ist eine Modulform zu $\Gamma_1(2)$ vom Gewicht -2 und Charakter $\chi(M) = e(-b/2)$. Die Darstellung

$$f|_S(\tau) = -16\frac{\eta(\tau)^4}{\eta(\tau/2)^8}$$

zeigt $\mathrm{ord}_\infty(f) = -1/2$ und $\mathrm{ord}_0(f) = 0$.

3 Vektorwertige Modulformen zur Weil-Darstellung

In diesem Kapitel erklären wir vektorwertige Modulformen zur Weil-Darstellung eines geraden Gitters gerader Signatur. Dazu führen wir im ersten Abschnitt zunächst die Weil-Darstellung ein. Wir folgen der Präsentation aus [Hag10].

3.1 Die Weil-Darstellung

Sei L ein gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-) und Signatur $r = b^+ - b^-$ mit Diskriminantengruppe $\mathcal{L} = L'/L$. Die endliche quadratische Form auf $\mathcal{L}$ bezeichnen wir mit Q, die zugehörige Bilinearform mit $(\cdot, \cdot)$. Wir nehmen zusätzlich an, dass die Signatur von L gerade ist. Da dies für Gitter von Primzahlstufe stets erfüllt ist, stellt diese Annahme für uns keine Einschränkung dar. Wir benutzen die Abkürzung $e(z) = e^{2\pi i z}$.

Definition 3.1.1. Der *Gruppenring* $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ von $\mathcal{L}$ ist die Menge aller formalen Linearkombinationen

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} a_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma$$

mit $a_\gamma \in \mathbb{C}$ und formalen Basisvektoren $\mathfrak{e}_\gamma$.

Definition 3.1.2. Für die Erzeuger $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definieren wir eine Wirkung auf den Basisvektoren $\mathfrak{e}_\gamma$ durch

$$\begin{aligned} \rho_L(T) \, \mathfrak{e}_\gamma &= e(Q(\gamma)) \, \mathfrak{e}_\gamma, \\ \rho_L(S) \, \mathfrak{e}_\gamma &= \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(-(\beta, \gamma)) \, \mathfrak{e}_\beta \, . \end{aligned}$$

Wir erklären $\rho_L(S)x$ und $\rho_L(T)x$ für $x = \sum a_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma \in \mathbb{C}[\mathcal{L}]$ durch lineare Fortsetzung und setzen die Wirkung durch $\rho_L(MN)x = \rho_L(M)\big(\rho_L(N)x\big)$ auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ fort. Dann definiert $\rho_L : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\mathcal{L}])$ eine Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$, die *Weil-Darstellung bezüglich des Gitters L*.

Stattet man L mit der quadratischen Form $-q$ statt q aus und betrachtet die Weil-Darstellung zu $(L, -q)$, so erhält man die *duale Weil-Darstellung zu L*, die wir mit ρ_L^* notieren. Stellt man sich $\rho_L(M)$ als Matrix vor, so ist $\rho_L^*(M)$ die komplex konjugierte Matrix, d.h. für $\rho_L(M)x = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} a_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma$ ist $\rho_L^*(M)x = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \overline{a_\gamma} \, \mathfrak{e}_\gamma$.

Als Beispiel berechnen wir die Wirkung der negativen Einheitsmatrix $-I$ auf den Basisvektoren $\mathfrak{e}_\gamma$:

Satz 3.1.3. *Es gilt* $\rho_L(-I)\,\mathfrak{e}_\gamma = e(-r/4)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$.

Beweis. Wegen $S^2 = -I$ können wir berechnen:

$$\begin{aligned}\rho_L(-I)\,\mathfrak{e}_\gamma &= \rho_L(S)\Big(\rho_L(S)\,\mathfrak{e}_\gamma\Big)\\ &= \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}}\sum_{\beta\in\mathcal{L}} e(-(\beta,\gamma))\rho_L(S)e_\beta\\ &= \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}}\sum_{\beta\in\mathcal{L}} e(-(\beta,\gamma))\frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}}\sum_{\delta\in\mathcal{L}} e(-(\delta,\beta))e_\delta\\ &= \frac{e(-r/4)}{|\mathcal{L}|}\sum_{\delta\in\mathcal{L}}\left(\sum_{\beta\in\mathcal{L}} e(-(\beta,\gamma+\delta))\right)e_\delta.\end{aligned}$$

Da die Abbildung $\beta \mapsto e(-(\beta,\gamma+\delta))$ einen Charakter auf $\mathcal{L}$ darstellt, gilt

$$\sum_{\beta\in\mathcal{L}} e(-(\beta,\gamma+\delta)) = \begin{cases} |\mathcal{L}|, & \text{falls } \delta = -\gamma,\\ 0, & \text{falls } \delta \neq -\gamma.\end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Anhand der Definition ist nicht direkt klar, wie man die Wirkung $\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma$ einer beliebigen Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ praktisch ausrechnen kann. Scheithauer hat in [Sch09], Theorem 4.7, eine explizite Formel für $\rho_L^*(M)\,\mathfrak{e}_\gamma$ gefunden. Durch komplexe Konjugation der Koeffizienten erhält man eine Formel für $\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma$. Wir geben eine vereinfachte Formel für $M \in \Gamma_0(N)$ an.

Satz 3.1.4. *Sei L ein gerades Gitter der Stufe N mit $4 \nmid N$ und $\mathcal{L} = L'/L$ seine Diskriminantengruppe. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ und $\gamma \in \mathcal{L}$ gilt*

$$\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma = \left(\frac{a}{|\mathcal{L}|}\right) e(bdQ(\gamma))\,\mathfrak{e}_{d\gamma}\,.$$

Dabei ist $\left(\frac{a}{|\mathcal{L}|}\right)$ das Kronecker-Symbol.

Beweis. Beachte zunächst, dass die in [Sch09] angegebenen Formeln für die duale Weil-Darstellung ρ_L^* gelten, d.h. die Koeffizienten müssen komplex konjugiert werden. Nach [Sch09], Proposition 4.5, gilt

$$\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma = \left(\frac{a}{|\mathcal{L}|}\right) e(-(a-1)\,\mathrm{oddity}(\mathcal{L})/8)e(bdQ(\gamma))\,\mathfrak{e}_{d\gamma},$$

wobei $\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) = \prod \mathrm{oddity}(q^{\pm n})$ und das Produkt über die 2-adischen Jordan-Komponenten $q^{\pm n}$ von $\mathcal{L}$ läuft. Wegen $4 \nmid N$ sind die 2-adischen Jordan-Komponenten entweder trivial oder gerade. Für die geraden Komponenten gilt $\mathrm{oddity}(q_{II}^{\pm n}) = 4k$ mit $k = 1$

falls q kein Quadrat und der Exponent $-n$ ist, und $k = 0$ andernfalls (siehe [Sch09], Abschnitt 2).

Wir zeigen, dass $(a-1)\,\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) \equiv 0 \mod 8$ ist: Ist die Stufe von L ungerade, so ist $\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) \equiv 0 \mod 8$, da alle 2-adischen Jordan-Komponenten trivial sind. Ist N gerade, so ist entweder $\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) \equiv 0 \mod 8$ oder $\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) \equiv 4 \mod 8$. Da N gerade ist und $N \mid c$ gilt, muss a ungerade sein, es gilt also in jedem Fall $(a-1)\,\mathrm{oddity}(\mathcal{L}) \equiv 0 \mod 8$. Daher vereinfacht sich die Formel aus [Sch09] wie oben angegeben. □

Wir wollen die Wirkung von $\rho_L(M)$ für $M \in \Gamma(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ noch etwas griffiger aufschreiben. Dafür definieren wir:

Definition 3.1.5. Sei L ein gerades Gitter der Stufe N mit $4 \nmid N$ und $\mathcal{L}$ seine Diskriminantengruppe. Sei $\gamma \in \mathcal{L}$. Definiere auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Abbildungen

$$\chi_{\mathcal{L}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{a}{|\mathcal{L}|}\right), \qquad \chi_\gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e(bQ(\gamma)).$$

Dann ist $\chi_{\mathcal{L}}$ ein Charakter mod N von $\Gamma_0(N)$ und χ_γ ein Charakter mod N von $\Gamma_1(N)$.

Aus dem letzten Satz folgt nun:

Korollar 3.1.6. *Sei L ein gerades Gitter der Stufe N mit $4 \nmid N$ und $\mathcal{L} = L'/L$ seine Diskriminantengruppe. Sei $\gamma \in \mathcal{L}$.*

1. *Für $M \in \Gamma(N)$ gilt*
$$\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma = \mathfrak{e}_\gamma\,.$$
2. *Für $M \in \Gamma_1(N)$ gilt*
$$\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma = \chi_\gamma(M)\,\mathfrak{e}_\gamma\,.$$
3. *Für $M \in \Gamma_0(N)$ gilt*
$$\rho_L(M)\,\mathfrak{e}_\gamma = \chi_{\mathcal{L}}(M) e(bdQ(\gamma))\,\mathfrak{e}_{d\gamma}\,.$$

3.2 Vektorwertige Modulformen zur Weil-Darstellung

In diesem Abschnitt sei wieder L ein gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-) mit gerader Signatur $r = b^+ - b^-$ und Diskriminantengruppe $\mathcal{L} = L'/L$.

Wir betrachten nun vektorwertige Funktionen $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[\mathcal{L}]$. Dabei schreiben wir $F = \sum_{\gamma\in\mathcal{L}} f_\gamma\,\mathfrak{e}_\gamma$ mit Komponentenfunktionen $f_\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und nennen F holomorph, falls die f_γ holomorph sind. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definieren wir den Strichoperator $|_M$ vom Gewicht k durch

$$F|_M(\tau) = j(M,\tau)^{-k} \rho_L(M)^{-1} F(M\tau)$$

mit dem Automorphiefaktor $j(M,\tau) = c\tau + d$. Analog definieren wir den Strichoperator $|^*_M$ mit der dualen Weil-Darstellung ρ_L^* statt ρ_L.

Um die nachfolgende Definition einer vektorwertigen Modulform etwas zu motivieren, nehmen wir an, $F = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma$ ist holomorph und erfüllt $F|_T = F$. Dann gilt

$$f_\gamma(\tau + 1) = e(Q(\gamma)) f_\gamma(\tau)$$

für alle $\gamma \in \mathcal{L}$. Also ist $e(-Q(\gamma)\tau) f_\gamma(\tau)$ eine holomorphe 1-periodische Funktion und hat daher eine Fourier-Entwicklung der Form

$$e(-Q(\gamma)\tau) f_\gamma(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(\gamma, m) e(m\tau).$$

mit $b(\gamma, m) \in \mathbb{C}$. Anders ausgedrückt hat jedes f_γ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f_\gamma(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + Q(\gamma)} c(\gamma, n) e(n\tau)$$

mit $c(\gamma, n) \in \mathbb{C}$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass die Komponentenfunktionen im Fall $F|^*_T = F$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f_\gamma(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} - Q(\gamma)} c(\gamma, n) e(n\tau)$$

haben.

Definition 3.2.1. Eine Funktion $F = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[\mathcal{L}]$ heißt *fast holomorphe Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht k*, wenn gilt:

1. F ist holomorph,
2. $F|_M = F$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
3. Die Komponentenfunktionen f_γ von F besitzen Fourier-Entwicklungen der Form
$$f_\gamma(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} + Q(\gamma) \\ n \geq n_\gamma}} c(\gamma, n) e(n\tau)$$
mit $c(\gamma, n) \in \mathbb{C}$ und $n_\gamma \in \mathbb{Z}$.

Die Summe

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} + Q(\gamma) \\ n < 0}} c(\gamma, n) e(n\tau) \, \mathfrak{e}_\gamma$$

heißt *Hauptteil von F*. Verschwinden in den Fourier-Entwicklungen der f_γ alle $c(\gamma, n)$ mit $n < 0$ (bzw. $n \leq 0$), so heißt F *holomorphe Modulform* (bzw. *Spitzenform*).

Den Raum der fast holomorphen Modulformen zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht k bezeichnen wir mit $M^!_{k,\rho_L}$, den Raum der holomorphen Modulformen mit M_{k,ρ_L} und den Raum der Spitzenformen mit S_{k,ρ_L}.

Analog können wir Modulformen zur dualen Weil-Darstellung ρ_L^* erklären, indem wir in der Definition $F|_M^* = F$ für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ fordern. Die Indizes der Fourier-Reihen der f_γ laufen dann in $\mathbb{Z} - Q(\gamma)$.

Satz 3.2.2. *Sei $F = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma \in M^!_{k,\rho_L}$ eine Modulform. Für $\gamma \in \mathcal{L}$ gilt*

$$f_\gamma = \begin{cases} f_{-\gamma}, & \text{falls } k \equiv r/2 \mod 2 \\ -f_{-\gamma}, & \text{falls } k \not\equiv r/2 \mod 2 \end{cases}$$

Beweis. Mit $\rho_L(-I)^{-1} \mathfrak{e}_\gamma = \rho_L(-I)\,\mathfrak{e}_\gamma = e(-r/4)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$ haben wir

$$\begin{aligned} F|_{-I} &= \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} (-1)^{-k} f_\gamma \rho_L(-I)^{-1} \mathfrak{e}_\gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} e((-2k-r)/4) f_\gamma \, \mathfrak{e}_{-\gamma} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} e((-2k-r)/4) f_{-\gamma} \, \mathfrak{e}_\gamma \,. \end{aligned}$$

Aus $F|_{-I} = F$ folgt $f_\gamma = e((2k-r)/4) f_{-\gamma}$ und damit die Behauptung. □

Wir zeigen als Nächstes, dass die Komponentenfunktionen einer vektorwertigen Modulform zur Weil-Darstellung elliptische Modulformen zu Kongruenzuntergruppen sind. Dabei nutzen wir aus, dass wir die Wirkung der Weil-Darstellung für Matrizen aus $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ explizit kennen:

Satz 3.2.3. *Sei L ein gerades Gitter der Stufe N mit $4 \nmid N$ und $\mathcal{L} = L'/L$ seine Diskriminantengruppe. Weiter sei $F = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma \in M^!_{k,\rho_L}$ eine fast holomorphe Modulform. Dann gilt:*

1. $f_\gamma \in M^!_k(\Gamma(N))$ *für alle* $\gamma \in \mathcal{L}$,
2. $f_\gamma \in M^!_k(\Gamma_1(N), \chi_\gamma)$ *für alle* $\gamma \in \mathcal{L}$,
3. $f_0 \in M^!_k(\Gamma_0(N), \chi_{\mathcal{L}})$.

Ist F eine holomorphe Modulform bzw. eine Spitzenform, so gilt dasselbe für die Komponentenfunktionen.

Beweis. Wir zeigen nur Punkt 2, da 1 und 3 analog gehen. In Korollar 3.1.6 haben wir die Wirkung von $\Gamma_1(N)$ in der Weil-Darstellung angegeben. Demnach gilt für $M \in \Gamma_1(N)$:

$$F|_M(\tau) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} j(M,\tau)^{-k} f_\gamma(M\tau) \rho_L(M)^{-1} \mathfrak{e}_\gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} j(M,\tau)^{-k} \chi_\gamma(M)^{-1} f_\gamma(M\tau)\, \mathfrak{e}_\gamma \,.$$

Wegen $F|_M = F$ erhalten wir für $\gamma \in \mathcal{L}$

$$j(M,\tau)^{-k} \chi_\gamma(M)^{-1} f_\gamma(M\tau) = f_\gamma(\tau),$$

also $f_\gamma|_M = \chi_\gamma(M) f_\gamma$. Da außerdem $f_\gamma|_M$ für jede Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Linearkombination der Komponentenfunktionen f_β ist, hat $f_\gamma|_M$ höchstens Pole in den Spitzen. Hieraus folgt auch, dass die Komponentenfunktionen holomorphe Modulformen bzw. Spitzenformen sind, wenn dies für F gilt. □

Da holomorphe elliptische Modulformen zu $\Gamma(N)$ von negativem Gewicht nach Satz 2.2.3 identisch verschwinden, erhalten wir:

Korollar 3.2.4. *Für $k < 0$ gilt $M_{k,\rho_L} = \{0\}$.*

Insbesondere ist eine fast holomorphe vektorwertige Modulform negativen Gewichts durch ihren Hauptteil eindeutig festgelegt, da die Differenz zweier vektorwertiger Modulformen mit dem selben Hauptteil und dem selben negativen Gewicht eine holomorphe vektorwertige Modulform negativen Gewichts ist.

Die Gruppe $\operatorname{Aut}(\mathcal{L})$ besteht aus den Automorphismen σ von $\mathcal{L}$ mit $Q(\sigma(\gamma)) = Q(\gamma) \bmod 1$ für alle $\gamma \in \mathcal{L}$. Wir definieren eine Wirkung von $\operatorname{Aut}(\mathcal{L})$ auf dem Gruppenring $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ durch

$$\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} a_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma \right)^\sigma = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} a_\gamma \, \mathfrak{e}_{\sigma(\gamma)}$$

mit $\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} a_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma \in \mathbb{C}[\mathcal{L}]$ und $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathcal{L})$. Dann gilt:

Satz 3.2.5. *Die oben definierte Wirkung von $\operatorname{Aut}(\mathcal{L})$ auf $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ kommutiert mit der Weil-Darstellung ρ_L, d.h. es gilt*

$$\big(\rho_L(M)x\big)^\sigma = \rho_L(M)x^\sigma$$

für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), x \in \mathbb{C}[\mathcal{L}]$ und $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathcal{L})$.

Beweis. Für $\gamma \in \mathcal{L}$ und $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathcal{L})$ haben wir

$$\big(\rho_L(T) \, \mathfrak{e}_\gamma\big)^\sigma = (e(Q(\gamma)) \, \mathfrak{e}_\gamma)^\sigma = e(Q(\gamma)) \, \mathfrak{e}_{\sigma(\gamma)} = e(Q(\sigma(\gamma))) \, \mathfrak{e}_{\sigma(\gamma)} = \rho_L(T) \, \mathfrak{e}_\gamma^\sigma$$

und

$$\begin{aligned} \big(\rho_L(S) \, \mathfrak{e}_\gamma\big)^\sigma &= \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(-(\beta, \gamma)) \, \mathfrak{e}_{\sigma(\beta)} = \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(-(\sigma(\beta), \sigma(\gamma))) \, \mathfrak{e}_{\sigma(\beta)} \\ &= \frac{e(-r/8)}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(-(\beta, \sigma(\gamma))) \, \mathfrak{e}_\beta = \rho_L(S) \, \mathfrak{e}_\gamma^\sigma \, . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Für eine vektorwertige Modulform $F = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \, \mathfrak{e}_\gamma$ zur Weil-Darstellung ρ_L schreiben wir $F^\sigma = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} f_\gamma \, \mathfrak{e}_{\sigma(\gamma)}$ und nennen F invariant unter einer Teilmenge G von $\operatorname{Aut}(\mathcal{L})$, falls $F^\sigma = F$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

3.3 Liftungen skalarwertiger Modulformen zu vektorwertigen Modulformen

Wir haben gesehen, dass die Komponentenfunktionen vektorwertiger Modulformen zur Weil-Darstellung elliptische Modulformen zu Kongruenzuntergruppen sind. Umgekehrt zeigt das folgende Resultat von Scheithauer (siehe [Sch11], Theorem 3.1), dass wir vektorwertige Modulformen aus elliptischen Modulformen konstruieren können:

Theorem 3.3.1. *Sei L ein gerades Gitter gerader Signatur der Stufe N mit $4 \nmid N$, und sei $\mathcal{L}$ seine Diskriminantengruppe.*

1. *Sei $f \in M_k^!(\Gamma(N))$ und $\gamma \in \mathcal{L}$. Dann ist*
$$F_{\Gamma(N),f,\gamma} = \sum_{M \in \Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma$$
eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zu ρ_L vom Gewicht k, die invariant ist unter dem Stabilisator von γ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$.

2. *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ und $f \in M_k^!(\Gamma_1(N), \chi_\gamma)$. Dann ist die Funktion*
$$F_{\Gamma_1(N),f,\gamma} = \sum_{M \in \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma$$
eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zu ρ_L vom Gewicht k, die invariant ist unter dem Stabilisator von γ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$.

3. *Sei $f \in M_k^!(\Gamma_0(N), \chi_{\mathcal{L}})$ und H eine isotrope Teilmenge von $\mathcal{L}$, die invariant ist unter $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, d.h. $Q(\gamma) = 0 \mod 1$ und $k\gamma \in H$ für alle $k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \gamma \in H$. Dann ist*
$$F_{\Gamma_0(N),f,H} = \sum_{M \in \Gamma_0(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \sum_{\gamma \in H} f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma$$
eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zu ρ_L vom Gewicht k, die invariant ist unter den Isometrien von $\mathcal{L}$, die H als Menge fest lassen.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für Punkt 2, da 1 und 3 analog gehen, und kürzen $F = F_{\Gamma_1(N),f,\gamma}$ ab.

Zunächst ist F wohldefiniert, denn für $K \in \Gamma_1(N)$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt
$$\begin{aligned} f|_{KM}\rho_L((KM)^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma &= \chi_\gamma(K) f|_M \rho_L(M^{-1}) \Big(\rho_L(K^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma \Big) \\ &= \chi_\gamma(K)\chi_\gamma(K^{-1}) f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma = f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma, \end{aligned}$$
das heißt die Summe in F hängt nicht von der Wahl des Repräsentantensystems von $\Gamma_1(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ab. Für $K = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt
$$\begin{aligned} F(K\tau) &= \sum_{M \in \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M(K\tau)\rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma \\ &= (c\tau + d)^k \sum_{M \in \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_{MK}(\tau)\rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma \\ &= (c\tau + d)^k \rho_L(K) \sum_{M \in \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_{MK}\rho_L((MK)^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma \\ &= (c\tau + d)^k \rho_L(K) F(\tau). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass mit M auch MK ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_1(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durchläuft.

Die Komponentenfunktionen von F sind Linearkombinationen von Funktionen $f|_M$ für geeignete $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und haben daher eine Fourier-Entwicklung mit endlichem Hauptteil.

Da die Weil-Darstellung mit der Wirkung von $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L})$ kommutiert, ist F invariant unter dem Stabilisator von γ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$. □

3.4 Vektorwertige Eisensteinreihen zur dualen Weil-Darstellung

In diesem Abschnitt sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$ gerade. Außerdem sei das Gewicht $k = 1 + b^-/2$ fest. Als Beispiel einer vektorwertigen Modulform zur dualen Weil-Darstellung betrachten wir die Eisensteinreihe

$$E(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathfrak{e}_0 \,|^*_M .$$

Dabei ist $\Gamma_\infty = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Nach [Bun01], Satz 1.2.17, konvergiert die Reihe auf $\mathbb{H}$ normal und stellt daher eine holomorphe Funktion von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C}[\mathcal{L}]$ dar. Da sie per Konstruktion invariant unter dem Strichoperator $|^*_M$ ist, ist sie eine vektorwertige Modulform zur dualen Weil-Darstellung ρ^*_L vom Gewicht k.

In einem späteren Abschnitt werden wir die Fourier-Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihe für Gitter von Primzahlstufe benötigen. Man kann die Fourier-Koeffizienten von E durch sogenannte Kloosterman-Summen ausdrücken (siehe [Bru01]), welche praktisch allerdings nur schwer auszurechnen sind. Hagemeier hat in [Hag10] die Kloosterman-Summen für den Spezialfall berechnet, dass die Stufe von L eine *ungerade* Primzahl ist, und damit einfachere Formeln für die Koeffizienten der Eistenstein-Reihe E hergeleitet. In [Sch06] hat Scheithauer die Fourier-Koeffizienten von E allgemeiner für Gitter quadratfreier Stufe berechnet, indem er skalarwertige Eisensteinreihen, die Modulformen zu Kongruenzuntergruppen sind, zu vektorwertigen Modulformen zur dualen Weil-Darstellung geliftet hat. Dadurch erhält man Formeln, die sich deutlich einfacher praktisch auswerten lassen. Wir geben die Formeln für den Fall an, dass L Primzahlstufe hat:

Theorem 3.4.1. *Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$, Signatur $r = 2 - b^-$ und Primzahlstufe p. Weiter sei $\mathcal{L} = L'/L \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell$ die Diskriminantengruppe von L. Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ und $n \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ mit $n \equiv -Q(\gamma) \mod 1$ und $n > 0$. Dann ist der Koeffizient $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihe E vom Gewicht $k = 1 + b^-/2$ gegeben durch*

$$q(\gamma, n) = \begin{cases} -\dfrac{4k}{(p^k - 1)B_k} (pn)^{k-1} \sigma_{1-k}(pn, \chi_{0,p}) \left((-1)^{-r/4} p^{1-\ell/2} + \delta_{0\gamma} S_\ell\right), & \ell \text{ gerade}, \\ -\dfrac{4k}{B_{k,\chi_p}} (pn)^{k-1} \sigma_{1-k}(pn, \chi_p) \left(\delta p^{(1-\ell)/2} + \delta_{0\gamma} S_\ell\right), & \ell \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\chi_p(d) = \left(\frac{d}{p}\right)$ das Kronecker-Symbol, $\delta_{0\gamma}$ das Kronecker-Delta,

$$\chi_{0,p}(j) = \begin{cases} 0, & p \mid j, \\ 1, & p \nmid j, \end{cases}$$

den Hauptcharakter mod p und

$$\sigma_s(a, \chi) = \sum_{d \mid a} \chi(d) d^s$$

die getwistete Teilersumme. Weiter ist

$$\delta = \begin{cases} (-1)^{-r/4}, & p \equiv 1 \mod 4, \\ (-1)^{(-r-2)/4}, & p \equiv 3 \mod 4, \end{cases}$$

und

$$S_\ell = \begin{cases} (p^{\nu_p(n)+1})^{1-k} \left((p-1) \dfrac{1-(p^{k-1})^{\nu_p(n)+1}}{1-p^{k-1}} - p \right), & \ell \text{ gerade}, \\ \chi_p\left(\dfrac{n}{p^{\nu_p(n)}}\right) (p^{\nu_p(n)+1})^{1-k}, & \ell \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die B_{k,χ_p} sind verallgemeinerte Bernoulli-Zahlen (siehe [Sch06]) und $B_k = B_{k,\chi_{0,p}}$ sind die üblichen Bernoulli-Zahlen.

Beweis. Da die Weil-Darstellung in [Sch06] dual zu unserer Definition ist, müssen wir die dortigen Ergebnisse auf das Gitter $(L, -q)$ anwenden, welches nun Typ $(b^-, 2)$ und Signatur $-r$ hat. Nach Theorem 7.1 in [Sch06] ist $q(\gamma, n)$ gegeben durch

$$q(\gamma, n) = -2 \frac{L(k, \psi)}{L(k, \chi)} \frac{m^k}{p^k} \frac{2k}{B_{k,\psi}} \sum_{\substack{c \mid p \\ c'\gamma = 0}} \psi_c(p/m_c) \psi_{c'}(-c) \frac{\psi_c(2)}{\psi(2)} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_p} \frac{\sqrt{m_c |\mathcal{L}_c|}}{\sqrt{m |\mathcal{L}|}} c' a_{k,\chi,c}(c'n), \tag{3.1}$$

wobei $c' = p/c$,

$$a_{k,\chi,c}(n) = \sum_{d \mid n} \chi_{c'}(n/d) \psi_c(d) b_c(d) d^{k-1},$$

und sich die anderen Symbole (die wie in [Sch06] definiert sind) vereinfachen zu

$$m_c = \begin{cases} 1, & \ell \text{ gerade oder } c = 1, \\ p, & \ell \text{ ungerade und } c = p, \end{cases} \qquad m = \begin{cases} 1, & \ell \text{ gerade}, \\ p, & \ell \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$\chi_c(j) = \begin{cases} 1, & c = 1, \\ \chi(j), & c = p, \end{cases} \qquad \chi(j) = \begin{cases} \chi_{0,p}(j), & \ell \text{ gerade}, \\ \left(\frac{j}{p}\right), & \ell \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$\psi_c(j) = \begin{cases} 1, & \ell \text{ gerade oder } c = 1, \\ \left(\frac{j}{p}\right), & \ell \text{ ungerade und } c = p, \end{cases} \qquad \psi(j) = \begin{cases} 1, & \ell \text{ gerade}, \\ \left(\frac{j}{p}\right), & \ell \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 1 & c = 1, \\ \left(\frac{-1}{p}\right)^{\ell/2} \epsilon_p, & c = p,\ \ell \text{ gerade}, \\ \left(\frac{-1}{p}\right)^{(\ell+1)/2} \epsilon_p, & c = p,\ \ell \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_c = \begin{cases} \{0\}, & p \nmid c \\ \mathcal{L}, & p \mid c \end{cases}$$

$$b_c(d) = \begin{cases} p-1 & \ell \text{ gerade, } p \mid d,\ c = p, \\ -1 & \ell \text{ gerade, } p \nmid d,\ c = p, \\ 1 & \ell \text{ ungerade oder } c = 1, \end{cases} \qquad \frac{L(k,\psi)}{L(k,\chi)} = \frac{1}{1-\psi(p)p^{-k}}$$

Dabei ist ϵ_p definiert wie in Satz 1.5.2, wobei r durch $-r$ ersetzt werden muss. Die Summe in (3.1) hat einen Summanden, falls $\gamma \neq 0$. Sie hat zwei Summanden, falls $\gamma = 0$. Wir erhalten:

$$q(\gamma, n) = \begin{cases} -\dfrac{4k}{(p^k-1)B_k} \left(\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{\ell/2} \dfrac{\epsilon_p p}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \displaystyle\sum_{d \mid pn} \chi_{0,p}\left(\frac{pn}{d}\right) d^{k-1} + \delta_{0\gamma} \sum_{d \mid n} b_p(d) d^{k-1} \right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } \ell \text{ gerade}, \\ -\dfrac{4k}{B_{k,\chi_p}} \left(\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{(\ell-1)/2} \left(\dfrac{2}{p}\right) \dfrac{\epsilon_p \sqrt{p}}{\sqrt{|\mathcal{L}|}} \displaystyle\sum_{d \mid pn} \chi_p\left(\frac{pn}{d}\right) d^{k-1} + \delta_{0\gamma} \sum_{d \mid n} \chi_p(d) d^{k-1} \right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } \ell \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Wir haben weiter

$$\sum_{d \mid pn} \chi_{0,p}\left(\frac{pn}{d}\right) d^{k-1} = \sum_{d \mid pn} \chi_{0,p}(d) \left(\frac{pn}{d}\right)^{k-1} = (pn)^{k-1} \sigma_{1-k}(pn, \chi_{0,p}).$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\sum_{d \mid n} \chi_p(d) d^{k-1} = (pn)^{k-1} \sigma_{1-k}(pn, \chi_p) S_\ell.$$

Unter Benutzung von $(\frac{-1}{2}) = 1$,

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \mod 4, \\ -1, & p \equiv 3 \mod 4, \end{cases}$$

für $p \neq 2$ und Satz 1.5.2 sehen wir dass $\left(\frac{-1}{p}\right)^{\ell/2} \epsilon_p = (-1)^{-r/4}$ falls ℓ gerade ist, und $\left(\frac{-1}{p}\right)^{(\ell-1)/2} \left(\frac{2}{p}\right) \epsilon_p = \delta$ falls ℓ ungerade ist. Jetzt müssen wir nur noch $\sum_{d|n} b_p(d) d^{k-1}$ umschreiben. Im Fall $\gamma = 0$ ist $n \in \mathbb{Z}$. Daher können wir $n = p^{\nu_p(n)} a$ mit $p \nmid a$ schreiben. Es gilt

$$\sum_{d|n} b_p(d) d^{k-1} = \sum_{\nu=0}^{\nu_p(n)} \sum_{d|a} b_p(p^\nu d)(p^\nu d)^{k-1} = \sum_{d|a} \underbrace{b_p(d)}_{-1} d^{k-1} + \sum_{\nu=1}^{\nu_p(n)} \sum_{d|a} \underbrace{b_p(p^\nu d)}_{p-1} (p^\nu d)^{k-1}.$$

Jetzt zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$\sum_{d|n} b_p(d) d^{k-1} = (pn)^{k-1} \sigma_{1-k}(pn, \chi_{0,p}) S_\ell$$

gilt. Zusammen erhalten wir die angegebene Formel. $\square$

Beachte, dass der Wert der Formel für $q(\gamma, n)$ nur dann den Koeffizienten einer Eisensteinreihe beschreibt, wenn $\gamma \in \mathcal{L}$ ist mit $Q(\gamma) \equiv -n \mod 1$. Andernfalls ist der Koeffizient der Eisensteinreihe 0, der Wert von $q(\gamma, n)$ aber nicht notwendigerweise. Im Anhang berechnen wir die ersten Koeffizienten von E für einige spezielle Gitter.

In den Formeln für $q(\gamma, n)$ in [Hag10], Satz 5.31, hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen: statt nach $n \in \mathbb{Z}$ bzw. $n \notin \mathbb{Z}$ muss nach $\gamma = 0$ bzw. $\gamma \neq 0$ unterschieden werden. Dann stimmen die dort angegebenen Formeln mit unseren überein.

4 Orthogonale Modulformen

In diesem Kapitel wollen wir Modulformen zu Untergruppen der orthogonalen Gruppe $O(2, b^-)$ von $\mathbb{R}^{2,b^-}$ definieren und Borcherds' singulären Theta-Lift (Theorem 13.3 in [Bor98]) angeben, der es erlaubt, aus vektorwertigen Modulformen zur Weil-Darstellung Modulformen zu orthogonalen Gruppen zu konstruieren, deren Null- und Polstellen einfach zu beschreiben sind und die interessante Produkt-Entwicklungen in den Spitzen haben. Wir halten die Darstellung knapp, Details finden sich in [Bor98], [BGHZ08], [Bru01], [Bun01] und [Hag10].

4.1 Orthogonale Modulformen

In diesem Abschnitt sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit quadratischer Form q und zugehöriger Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es sei $\mathrm{Gr}(L)$ die Grassmannsche der 2-dimensionalen Unterräume von $L \otimes \mathbb{R}$, auf denen q positiv definit ist, und $\mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C})$ der projektive Raum zu $L \otimes \mathbb{C}$. Wir schreiben $Z_L = X_L + iY_L \in L \otimes \mathbb{C}$ und $[Z_L] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C})$ für die natürliche Projektion. Die Menge

$$\mathcal{K} = \{[X_L + iY_L] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) : \langle X_L, Y_L \rangle = 0, \langle X_L, X_L \rangle = \langle Y_L, Y_L \rangle > 0\}$$

hat zwei Zusammenhangskomponenten, die durch $[Z_L] \mapsto [\overline{Z}_L]$ ineinander übergehen. Wir wählen eine davon aus und bezeichnen sie mit $\mathcal{K}^+$. Man kann die Elemente $Z_L \in L \otimes \mathbb{C}$ mit $[Z_L] \in \mathcal{K}^+$ als orientierte Orthogonalbasen 2-dimensionaler, positiv definiter Unterräume von $L \otimes \mathbb{R}$ auffassen. Damit erhält man eine Bijektion $\mathcal{K}^+ \cong \mathrm{Gr}(L)$ und eine komplexe Struktur auf $\mathrm{Gr}(L)$. Wir schreiben $\widetilde{\mathcal{K}}^+ = \{Z_L \in (L \otimes \mathbb{C}) \setminus \{0\} : [Z_L] \in \mathcal{K}^+\}$ für das Urbild von $\mathcal{K}^+$ unter der natürlichen Projektion.

Die orthogonale Gruppe $O(L)$ wirkt auf natürliche Weise auf $\mathrm{Gr}(L)$ und $\mathcal{K}$. Es bezeichne $O(L)^+$ die Untergruppe der Isometrien, die $\mathcal{K}^+$ als Menge fest lassen. Weiter definieren wir den *Diskriminantenkern* durch

$$\Gamma_L = \{\sigma \in O(L)^+ : \sigma(\gamma) = \gamma \quad \forall \gamma \in L'/L\}.$$

Da jedes $\sigma \in O(L)^+$ auch das duale Gitter L' fest lässt, haben wir eine natürliche Einbettung $O(L)^+ \hookrightarrow \mathrm{Aut}(L'/L)$. Γ_L ist der Kern dieses Homomorphismus und $\mathrm{Aut}(L'/L)$ ist endlich, also hat Γ_L endlichen Index in $O(L)^+$.

Definition 4.1.1. Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$. Sei Γ eine Untergruppe von $O(L)^+$ von endlichem Index, χ ein unitärer Charakter von Γ und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $\Psi : \widetilde{\mathcal{K}}^+ \to \mathbb{C}$ heißt *meromorphe Modulform zu* Γ *vom Gewicht* k *und Charakter* χ, falls gilt:

- Ψ ist meromorph auf $\widetilde{\mathcal{K}}^+$,
- $\Psi(tZ_L) = t^{-k}\Psi(Z_L)$ für alle $t \in \mathbb{C}^*$,
- $\Psi(\sigma(Z_L)) = \chi(\sigma)\Psi(Z_L)$ für alle $\sigma \in \Gamma$.

Ist Ψ zusätzlich holomorph, so heißt Ψ *holomorphe Modulform.*

Wie bei elliptischen Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es auch bei Modulformen zu orthogonalen Gruppen nicht zu jedem Gewicht nicht-triviale holomorphe Modulformen:

Satz 4.1.2. *Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$, das über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltet, und sei Ψ eine nicht-triviale holomorphe Modulform zum Diskriminantenkern Γ_L vom Gewicht k. Dann ist $k \geq b^-/2 - 1$. Die Zahl $b^-/2 - 1$ heißt daher das* singuläre Gewicht.

Beweis. Siehe [Bun01], Satz 3.1.19. □

4.2 Der singuläre Theta-Lift

Wir wollen nun Borcherds' singulären Theta-Lift erklären, der die Konstruktion orthogonaler Modulformen aus vektorwertigen Modulformen zur Weil-Darstellung erlaubt. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung.

4.2.1 Verallgemeinerte obere Halbebenen

Es sei weiterhin L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$. Sei $z \in L$ primitiv und isotrop (d.h. $\mathbb{Q}z \cap L = \mathbb{Z}z$ und $q(z) = 0$) und $z' \in L'$ mit $\langle z, z'\rangle = 1$. Wir nennen z auch *Spitze.* Das Gitter
$$K = L \cap z^\perp \cap z'^\perp$$
ist vom Typ $(1, n-1)$. Wir betrachten nun die Menge
$$\mathcal{H} = \{X + iY \in K \otimes \mathbb{C} : q(Y) > 0\}.$$
Für $Z \in \mathcal{H}$ schreiben wir
$$Z_L = Z - (q(Z) + q(z'))z + z',$$
wobei $q(Z) = q(X) - q(Y) + i\langle X, Y\rangle$. Man rechnet leicht nach, dass $[Z_L] \in \mathcal{K}$ gilt. Weiter ist die Abbildung
$$\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, \quad Z \mapsto [Z_L]$$
biholomorph (siehe [BGHZ08], Teil 2, Lemma 2.18). Das Urbild von $\mathcal{K}^+$ unter diesem Isomorphismus bezeichnen wir als *verallgemeinerte obere Halbebene* $\mathbb{H}_{b^-}$. Die orthogonale Gruppe $O(L)^+$ operiert mittels ψ auch auf $\mathbb{H}_{b^-}$.

Schreiben wir $iC = \mathbb{H}_{b^-} \cap i(K \otimes \mathbb{R})$, so ist C ein Kegel in $K \otimes \mathbb{R}$, d.h. $x \in C$ und $t > 0$ implizieren $tx \in C$, und $\pm x \in C$ impliziert $x = 0$. Weiter ist C eine der beiden

Zusammenhangskomponenten der Menge der Vektoren $Y \in K \otimes \mathbb{R}$ mit $q(Y) > 0$. Wir nennen C den *positiven Kegel.*

Ist Ψ eine Modulform auf $\widetilde{\mathcal{K}}^+$, so definieren wir eine Funktion Ψ_z auf $\mathbb{H}_{b^-}$ durch

$$\Psi_z(Z) = \Psi(Z_L) = \Psi(Z - (q(Z) + q(z'))z + z')$$

und bezeichnen auch Ψ_z als Modulform bzw. betrachten Ψ_z als Darstellung von Ψ in der Spitze z. Die Funktion Ψ_z besitzt eine Fourier-Entwicklung:

Satz 4.2.1. *Sei Ψ eine holomorphe Modulform zum Diskriminantenkern Γ_L vom Gewicht k und Charakter χ. Sei $z \in L$ eine primitive isotrope Spitze und $K = L \cap z^\perp \cap z'^\perp$ wie oben. Dann gibt es ein $\rho \in K \otimes \mathbb{Q}$, so dass Ψ_z eine Fourier-Entwicklung der Form*

$$\Psi_z(Z) = \sum_{\lambda \in \rho + K'} c(\lambda) e((\lambda, Z))$$

mit $c(\lambda) \in \mathbb{C}$ besitzt. Dabei ist $c(\lambda) \neq 0$ nur möglich wenn λ im Abschluss des positiven Kegels C liegt.

Beweis. Siehe [Hag10], Lemma 3.25, und [Bun01], Satz 1.3.15. □

Hat Ψ singuläres Gewicht $b^-/2 - 1$ und spaltet L über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen ab, so ist $c(\lambda) \neq 0$ sogar nur für $\lambda \in (\rho + K') \cap \overline{C}$ mit $q(\lambda) = 0$ möglich. Siehe dazu auch [Bun01], Abschnitt 3.1.7.

4.2.2 Reduktion vektorwertiger Modulformen auf Teilgitter

Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$. Wir wählen nun eine primitive isotrope Spitze $z \in L$ und ein $z' \in L'$ mit $\langle z, z' \rangle = 1$. Dann ist $K = L \cap z^\perp \cap z'^\perp$ ein Gitter vom Typ $(1, b^- - 1)$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ die Stufe von z, also die eindeutig bestimmte positive ganze Zahl mit $\langle z, L \rangle = N\mathbb{Z}$. Wähle ein $\zeta \in L$ mit $\langle z, \zeta \rangle = N$. Man kann dann $L = K \oplus \mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}\zeta$ schreiben. Wir definieren ein Teilgitter L'_0 von L' durch

$$L'_0 = \{\lambda \in L' : \langle \lambda, z \rangle \equiv 0 \mod N\}.$$

Offenbar gilt $L \subseteq L'_0$. Für $n \in L \otimes \mathbb{R}$ bezeichnet $n_K \in K \otimes \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion auf $K \otimes \mathbb{R}$. Für $n \in L'$ liegt $n_K \in K'$. Wir definieren die Projektion

$$p : L'_0 \to K', \quad p(\lambda) = \lambda_K - \frac{\langle \lambda, z \rangle}{N} \zeta_K.$$

Dann gilt $p(L) = K$. Für $\lambda = k + az + b\zeta \in L$ mit $k \in K$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ haben wir $p(\lambda) = k$. Insbesondere induziert p eine wohldefinierte Abbildung $L'_0/L \to K'/K$, die wir ebenfalls mit p bezeichnen.

Ist $F = \sum_{\gamma \in L'/L} f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma$ eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht k, so definiert die Funktion

$$F_K = \sum_{\beta \in K'/K} f_{\beta, K} \mathfrak{e}_\beta$$

mit

$$f_{\beta,K} = \sum_{\substack{\gamma \in L_0'/L \\ p(\gamma)=\beta}} f_\gamma$$

eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_K vom Gewicht k (siehe [Bor98], Theorem 5.3).

4.2.3 Theta-Integrale, Weyl-Kammern und Weyl-Vektoren

Sei L ein gerades Gitter vom Typ (b^+, b^-). Analog zum Fall $b^+ = 2$ definieren wir $\mathrm{Gr}(L)$ als die Menge aller b^+-dimensionalen positiv definiten Unterräume von $L \otimes \mathbb{R}$.

Sei F eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung vom Gewicht $b^+/2 - b^-/2$ und $\Theta(\tau, v)$ die Siegelsche Theta-Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathrm{Gr}(L)$ wie in [Hag10], Abschnitt 3.3.2. Für $v \in \mathrm{Gr}(L)$ betrachten wir das Integral

$$\Phi_L(v, F) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \overline{\Theta}(\tau, v) F(\tau) y^{b^+/2} \frac{dxdy}{y^2}.$$

Das Integral konvergiert im Allgemeinen nicht und muss regularisiert werden, um $\Phi_L(v, F)$ einen sinnvollen Wert zuzuweisen. Dann definiert $\Phi_L(v, F)$ eine reell analytische Funktion auf $\mathrm{Gr}(L)$ mit Singularitäten entlang sogenannter *Heegner-Divisoren*

$$H(\gamma, n) = \bigcup_{\substack{\lambda = \gamma \bmod L \\ q(\lambda)=n}} \lambda^\perp$$

für diejenigen $\gamma \in L'/L$ und $n < 0$, für die der Fourier-Koeffizient $c(\gamma, n)$ von F nicht 0 ist. Dabei bezeichnet $\lambda^\perp$ die Menge der $v \in \mathrm{Gr}(L)$, die zu λ orthogonal sind. Für die Details siehe [Bor98].

Ist L ein Gitter vom Typ $(2, b^-)$ und K ein Teilgitter vom Typ $(1, b^- - 1)$ wie oben, dann ist die Teilmenge von $\mathrm{Gr}(K)$, auf der $\Phi_K(v, F_K)$ reell analytisch ist, nicht zusammenhängend. Ihre Komponenten heißen *Weyl-Kammern*. Die Menge $\mathrm{Gr}(K)$ besteht aus eindimensionalen Unterräumen von $K \otimes \mathbb{R}$, auf denen q positiv definit ist. Man kann daher $\mathrm{Gr}(K)$ mit der Teilmenge $\{v \in C : |v| = 1\}$ (wobei $|v| = \langle v, v\rangle$) des positiven Kegels C identifizieren. Ist $W \subseteq \mathrm{Gr}(K)$ eine Weyl-Kammer, so nennen wir auch die Menge

$$\{v \in C : v/|v| \in W\}$$

eine Weyl-Kammer. Man kann nun zeigen, dass die Einschränkung von $\Phi_K(v, F_K)$ auf eine Weyl-Kammer eine lineare Funktion darstellt. Für eine Weyl-Kammer $W \subseteq C$ definieren wir den zugehörigen *Weyl-Vektor* $\rho(K, W, F_K)$ durch

$$8\sqrt{2}\pi\langle v, \rho(K, W, F_K)\rangle = |v|\Phi_K(v/|v|, F_K),$$

für $v \in W$.

4.2.4 Das Theorem von Borcherds

Ist F eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung, so definieren wir $O(L,F)^+$ als die Menge der Isometrien in $O(L)^+$, die F fest lassen. Dabei wirkt $\sigma \in O(L)^+$ auf $F = \sum_{\gamma\in\mathcal{L}} f_\gamma\, \mathfrak{e}_\gamma$ durch $F^\sigma = \sum_{\gamma\in\mathcal{L}} f_\gamma\, \mathfrak{e}_{\sigma(\gamma)}$. Offenbar gilt

$$\Gamma_L \subseteq O(L,F)^+ \subseteq O(L)^+,$$

d.h. $O(L,F)^+$ hat endlichen Index in $O(L)^+$.

Das folgende Theorem von Borcherds erlaubt es, gewisse vektorwertige Modulformen F zu Modulformen zu $O(L,F)^+$ anzuheben.

Theorem 4.2.2. *Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2,b^-)$ mit $b^- \geq 4$. Sei F eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht $1 - b^-/2$, deren Fourier-Koeffizienten $c(\gamma,n)$ für $n < 0$ ganzzahlig sind, und es gelte $c(0,0) \in 2\mathbb{Z}$. Dann existiert eine meromorphe Funktion Ψ auf $\widetilde{\mathcal{K}}^+$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Ψ ist eine meromorphe Modulform zu $O(L,F)^+$ vom Gewicht $c(0,0)/2$ und einem Charakter χ von $O(L,F)^+$ von endlicher Ordnung.*

2. *Der Divisor von Ψ ist gegeben durch*

$$(\Psi) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\mathcal{L}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}+Q(\gamma)\\ n<0}} c(\gamma,n) H(\gamma,n).$$

   Sind die Koeffizienten $c(\gamma,n)$ für $n < 0$ nicht-negativ, so besitzt Ψ keine Pole und ist eine holomorphe Modulform.

3. *Sei $z \in L$ eine primitive isotrope Spitze, W eine Weyl-Kammer und $\rho(K,W,F_K)$ der zugehörige Weyl-Vektor. Weiter sei $m_0 = \min\{n \in \mathbb{Q} : c(\gamma,n) \neq 0\}$. Dann besitzt die Einschränkung Ψ_z auf der Menge*

$$\{X + iY \in \mathbb{H}_{b^-} : q(Y) > |m_0|, X + iY \text{ kein Pol von } \Psi_z\}$$

   die normal konvergente Produktentwicklung

$$\Psi_z(Z) = ce\big((\rho(K,W,F_K),Z)\big) \prod_{\substack{\lambda\in K'\\ (\lambda,W)>0}} \prod_{\substack{\delta\in L_0'/L\\ p(\delta)=\lambda+K}} \big(1 - e((\delta,z') + (\lambda,Z))\big)^{c(\delta,q(\lambda))}$$

   mit einer Konstante c vom Betrag 1. Dabei bedeutet $(\lambda,W) > 0$, dass $\langle\lambda,x\rangle > 0$ ist für alle x im Inneren von W.

Beweis. Siehe [Bor98], Theorem 13.3 oder [Bru01], Theorem 3.22. □

Wegen der Produktentwicklungen in den Spitzen nennen wir Modulformen zu orthogonalen Gruppen, die als Anhebungen vektorwertiger Modulformen zur Weil-Darstellung entstehen, auch *Borcherdsprodukte* oder *automorphe Produkte*. Vektorwertige Modulformen $F \in M^!_{1-b^-/2,\rho_L}$ mit den Eigenschaften wie im Theorem nennen wir auch *Borcherdsinputs*.

Punkt 2 des Theorems kann äquivalent wie in [Bor98], Theorem 13.3, formuliert werden: Die Null- und Polstellen von Ψ liegen auf den Hyperebenen $\lambda^\perp$ für $\lambda \in M$ mit $q(\lambda) < 0$ und haben die Ordnung

$$\sum_{\substack{0<x\in\mathbb{R} \\ x\lambda\in L'}} c(x\lambda + L, q(x\lambda)).$$

Wir interessieren uns für holomorphe automorphe Produkte, d.h. die Ordnungen der Null- und Polstellen von Ψ sollen nicht-negativ sein. Dies ist offenbar der Fall, wenn die Fourier-Koeffizienten $c(\gamma, n)$ im Hauptteil des Borcherdsinputs F nicht-negativ sind. Diese Bedingung ist aber nicht notwendig, d.h. es kann im Allgemeinen holomorphe automorphe Produkte zu Borcherdsprodukten mit negativen Fourier-Koeffizienten im Hauptteil geben.

5 Automorphe Produkte singulären Gewichts

In ihrer Dissertation [Hag10] hat Hagemeier alle einfachen geraden Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$, deren Stufe eine ungerade Primzahl ist, klassifiziert (beachte, dass b^- in diesem Fall gerade ist). Dabei heißt ein gerades Gitter L von Typ $(2, b^-)$ *einfach*, wenn der Raum $S_{1+b^-/2,\rho_L^*}$ der Spitzenformen zur dualen Weil-Darstellung ρ_L^* vom Gewicht $1 + b^-/2$ trivial ist. Man interessiert sich für den sogenannten *Kontrollraum* $S_{1+b^-/2,\rho_L^*}$, da er angibt, ob es zu einem vorgegebenen Hauptteil

$$P(\tau) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+Q(\gamma) \\ n<0}} c(\gamma, n) e(n\tau) \mathfrak{e}_\gamma$$

(mit $c(\gamma, n) = c(-\gamma, n)$ für $\gamma \in \mathcal{L}$ und $c(\gamma, n) = 0$ für fast alle $n < 0$) eine vektorwertige Modulformen zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht $1-b^-/2$ gibt, die $P(\tau)$ als Hauptteil hat. Es gilt:

Satz 5.0.1. *Sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$. Die Summe $P(\tau)$ (mit $c(\gamma, n) = c(-\gamma, n)$ und $c(\gamma, n) = 0$ für fast alle $n < 0$) ist genau dann der Hauptteil einer fast holomorphen vektorwertigen Modulform $F \in M^!_{1-b^-/2,\rho_L}$, wenn*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+Q(\gamma) \\ n<0}} c(\gamma, n) s(\gamma, -n) = 0$$

für alle Spitzenformen

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}-Q(\gamma) \\ n>0}} s(\gamma, n) e(n\tau) \mathfrak{e}_\gamma \in S_{1+b^-/2,\rho_L^*}$$

gilt.

Beweis. Siehe [Bru01], Theorem 1.17. □

Ist der Kontrollraum trivial, so existiert also zu jedem Hauptteil $P(\tau)$, der die offensichtlichen Bedingungen erfüllt, eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht $1 - b^-/2$, die $P(\tau)$ als Hauptteil hat. Wir wollen vektorwertige Modulformen durch ihren Hauptteil definieren, da das Gewicht des Borcherdsprodukts durch den Hauptteil des Borcherdsinputs und die Koeffizienten der Eisensteinreihe E zur dualen Weil-Darstellung vom Gewicht $1 + b^-/2$ bestimmt wird:

Satz 5.0.2. *Sei* $F \in M^!_{1-b^-/2,\rho_L}$ *eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung* ρ_L *vom Gewicht* $1 - b^-/2$ *mit Hauptteil*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+Q(\gamma) \\ n<0}} c(\gamma, n) e(n\tau)\, \mathfrak{e}_\gamma,$$

wobei die $c(\gamma, n)$ *mit* $c(\gamma, n) = c(-\gamma, n)$ *ganzzahlige Koeffizienten seien, die fast alle 0 sind. Dann ist das Gewicht des Borcherdsprodukts zu* F *gegeben durch*

$$-\frac{1}{4} \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+Q(\gamma) \\ n<0}} c(\gamma, n) q(\gamma, -n),$$

wobei $q(\gamma, n)$ *die Fourier-Koeffizienten der Eisensteinreihe* E *zur dualen Weil-Darstellung* ρ^*_L *vom Gewicht* $1 + b^-/2$ *sind (siehe Abschnitt 3.4).*

Beweis. Siehe [Bru01], Korollar 4.24. □

Bei der Suche nach vektorwertigen Modulformen, deren Borcherdsprodukt singuläres Gewicht $b^-/2 - 1$ hat, erscheinen daher die einfachen Gitter besonders vielversprechend. Hagemeier hat unter den von ihr gefundenen einfachen Gittern von ungerader Primzahlstufe diejenigen bestimmt, zu denen es automorphe Produkte singulären Gewichts gibt, wobei sie nur Borcherdsinputs mit nicht-negativen Fourier-Koeffizienten im Hauptteil betrachtet hat.

Im Folgenden wollen wir die Klassifikation der einfachen Gitter ungerader Primzahlstufe aus [Hag10] vorstellen und um den Fall von Gittern der Stufe 2 erweitern. Wir geben alle einfachen geraden Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$ und Primzahlstufe an und finden unter ihnen diejenigen, zu denen es automorphe Produkte singulären Gewichts gibt, deren Borcherdsinputs nicht-negativen Hauptteil haben.

Von den entsprechenden vektorwertigen Modulformen ist zunächst nur das (negative) Gewicht und der Hauptteil bekannt. Wir konstruieren die Borcherdsinputs explizit als Anhebungen von Eta-Produkten, d.h. wir berechnen die Fourier-Koeffizienten $c(\gamma, n)$ für $n \geq 0$. Anschließend leiten wir Produkt- und Reihenentwicklungen der automorphen Produkte in verschiedenen Spitzen her.

5.1 Einfache Gitter von Primzahlstufe

Zur Bestimmung der einfachen Gitter von Primzahlstufe kann man die folgende Dimensionsformel für den Raum der Spitzenformen S_{k,ρ^*_L} benutzen:

Theorem 5.1.1. *Sei* L *ein gerades Gitter vom Typ* (b^+, b^-) *und* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $k > 2$ *und* $2k \equiv b^- - b^+ \mod 4$. *Dann ist die Dimension des Raumes* S_{k,ρ^*_L} *der Spitzenformen zur dualen Weil-Darstellung* ρ^*_L *vom Gewicht* k *gegeben durch*

$$\dim(S_{k,\rho^*_L}) = d + \frac{dk}{12} - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4,$$

wobei

$$d = |\mathcal{L}/\{\pm 1\}| = |\{\gamma \in \mathcal{L} : 2\gamma = 0\}| + \frac{1}{2}|\{\gamma \in \mathcal{L} : 2\gamma \neq 0\}|$$

und

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{d}{4} - \frac{1}{4\sqrt{|\mathcal{L}|}} e((2k + b^+ - b^-)/8) \operatorname{Re}(G(2, L)), \\
\alpha_2 &= \frac{d}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3|\mathcal{L}|}} \operatorname{Re}\left(e((4k + 3b^+ - 3b^- - 10)/24)(G(1, L) + G(-3, L)) \right), \\
\alpha_3 &= \frac{d}{2} - \frac{\alpha_4}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{L} \\ 2\gamma = 0}} \mathbb{B}(Q(\gamma)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Im}(G(n, L)), \\
\alpha_4 &= |\{\gamma \in \mathcal{L}/\{\pm 1\} : Q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}|.
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet $G(n, L) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}} e(nQ(\gamma))$ *die Gauß-Summe zu* L *und* $\mathbb{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine* 1*-periodische Funktion mit* $\mathbb{B}(0) = \mathbb{B}(1) = 0$ *und* $\mathbb{B}(x) = x - \frac{1}{2}$ *für* $0 < x < 1$.

Beweis. Siehe [Bru02], Abschnitt 2: Die Darstellungen von α_1 und α_2 finden sich in Lemma 2. Für α_3 siehe den Beweis von Lemma 5. □

Wir wollen die Dimensionsformel für den Kontrollraum $S_{1+b^-/2,\rho_L^*}$ für den Fall, dass L Primzahlstufe hat, vereinfachen:

Satz 5.1.2. *Sei* L *ein gerades Gitter vom Typ* $(2, b^-)$ *mit* $b^- \geq 4$*, Signatur* $r = 2 - b^-$ *und Primzahlstufe* p*, und sei* $\mathcal{L} = L'/L \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell$ *für ein* $\ell \in \mathbb{N}$*. Setze* $k = 1 + b^-/2$*. Für* $p = 2$ *ist* ℓ *gerade und es gilt:*

$$\dim(S_{k,\rho_L^*}) = \frac{2^\ell k}{12} - \frac{2^\ell}{3} - (1 + (-1)^{r/4})2^{(\ell-4)/2} - (-1)^{r/4} \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right).$$

Für $p = 3$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\dim(S_{k,\rho_L^*}) &= \frac{1}{24}(3^\ell + 1)(k - 1) - \frac{1}{4}(3^{\ell-1} + 1) - \frac{3^{\ell/2}}{3\sqrt{3}} \cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right) \\
&\quad - \begin{cases} (-1)^{r/4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right) + \frac{1}{4}(3^{\ell/2} - 3^{(\ell-2)/2})\right), & \ell \text{ gerade}, \\ (-1)^{(r-2)/4}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{b^-}{12}\pi\right) + \frac{1}{2}3^{(\ell-3)/2}\right), & \ell \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $p \equiv 1 \mod 4$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\dim(S_{k,\rho_L^*}) &= \frac{1}{24}(p^\ell + 1)(k - 1) - \frac{1}{4}(p^{\ell-1} + 1) \\
&\quad - \begin{cases} (-1)^{r/4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right) + \frac{1}{4}(p^{\ell/2} - p^{(\ell-2)/2})\right), & \ell \text{ gerade}, \\ (-1)^{r/4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2}{p}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(1 + \left(\frac{p}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right)\right), & \ell \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $p \equiv 3 \mod 4$ mit $p \neq 3$ gilt:

$$\begin{aligned}\dim(S_{k,\rho_L^*}) &= \frac{1}{24}(p^\ell+1)(k-1) - \frac{1}{4}(p^{\ell-1}+1)\\ &- \begin{cases}(-1)^{r/4}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\left(\frac{b^-}{12}\pi\right)+\frac{1}{4}(p^{\ell/2}-p^{(\ell-2)/2})\right), & \ell \text{ gerade},\\ (-1)^{(r-2)/4}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(1+\left(\frac{p}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{b^-}{12}\pi\right)+\frac{1}{2}p^{(\ell-1)/2}h(-p)\right), & \ell \text{ ungerade}.\end{cases}\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $h(-p)$ die Klassenzahl des algebraischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$. Für $p \equiv 3 \mod 4$ mit $p \neq 3$ gilt nach [Coh00], Korollar 5.3.13:

$$h(-p) = -\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p-1} n\left(\frac{n}{p}\right).$$

Beweis. Wir geben die wesentlichen Schritte an, die zur Vereinfachung nötig sind:

Für $p = 2$ haben wir $d = 2^\ell$, da dann $\gamma = -\gamma$ für jedes Element $\gamma \in \mathcal{L}$ gilt, und für $p \neq 2$ ist $d = (p^\ell+1)/2$, da dann $\gamma \neq -\gamma$ für alle $\gamma \in \mathcal{L}\setminus\{0\}$ gilt. Mit $b^+ = 2, k = 1+b^-/2$ und den Werten der Gauß-Summen $G(n, L)$ aus Satz 1.5.2 lassen sich α_1 und α_2 leicht vereinfachen.

Weiter haben wir $\sum_{2\gamma=0}\mathbb{B}(Q(\gamma)) = 0$ in α_3: Für $p = 2$ folgt dies daraus, dass $Q(\gamma) = 0 \mod 1$ oder $Q(\gamma) = 1/2 \mod 1$ ist und $\mathbb{B}$ auf diesen Werten verschwindet, und für $p \neq 2$ gilt $2\gamma = 0$ nur für $\gamma = 0$. Die unendliche Reihe in α_3 verschwindet, falls $p = 2, p \equiv 1 \mod 3$ oder ℓ gerade ist, da die $G(n, L)$ dann reelle Zahlen sind. Für $p \equiv 3 \mod 4$ und ungerades ℓ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Im}(G(n,L)) = (-1)^{(r-2)/4}p^{\ell/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{p}\right).$$

Wegen $p \equiv 3 \mod 4$ gilt $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{-p}{n}\right)$. Nach [Coh00], Proposition 5.3.12, gilt weiter

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-p}{n}\right) = \begin{cases}\frac{2\pi h(-p)}{6\sqrt{p}}, & \text{falls } p = 3,\\ \frac{2\pi h(-p)}{2\sqrt{p}}, & \text{falls } p \equiv 3 \mod 4, p \neq 3,\end{cases}$$

wobei $h(-p)$ die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ bezeichnet. Im Fall $p = 3$ ist $h(-3) = 1$. Damit lässt sich α_3 auch für $p \equiv 3 \mod 4$ und ungerades ℓ vereinfachen.

Zu α_4: Für $p = 2$ haben wir

$$\alpha_4 = |\{\gamma \in \mathcal{L} : Q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}| = 2^{\ell-1} + \epsilon_2 2^{(\ell-2)/2}$$

nach [Sch06], Proposition 3.1. Für $p \neq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\{\gamma \in \mathcal{L} : Q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}|\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\begin{cases}p^{\ell-1} + \epsilon_p\left(\frac{-1}{p}\right)^{\ell/2}(p^{\ell/2}-p^{(\ell-2)/2}), & \text{falls } \ell \text{ gerade},\\ p^{\ell-1}, & \text{falls } \ell \text{ ungerade},\end{cases}\end{aligned}$$

nach [Sch06], Proposition 3.2. Mit $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ für $p \neq 2$ und den Werten von ϵ_p aus Satz 1.5.2 kann man diese Formel noch etwas vereinfachen. Nun folgen die angegebenen Dimensionsformeln durch eine einfache Rechnung. $\square$

Zur Bestimmung der einfachen Gitter von Primzahlstufe kann man nun folgendermaßen vorgehen: Zunächst schätzt man die obigen Dimensionsformeln geeignet ab, um einzusehen, dass der Kontrollraum für genügend große Werte von p und b^- nicht trivial ist, also Spitzenformen enthält. Für die endlich vielen verbleibenden Gitter rechnet man die Dimension des Kontrollraums aus und prüft nach, ob $\dim(S_{1+b^-/2,\rho_L^*}) = 0$ gilt.

Mit Ausnahme der Klassenzahl in der Formel für den Fall $p \equiv 3 \mod 4, p \neq 3$ und ungerades ℓ kann man alle in den Dimensionsformeln auftauchenden Größen elementar abschätzen. Für die Klassenzahl gilt die einfache Abschätzung

$$h(-p) = -\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p-1} n\left(\frac{n}{p}\right) \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p-1} n = \frac{1}{p}\cdot\frac{p(p-1)}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

Dies genügt für unsere Zwecke aber noch nicht. Wir benötigen:

Lemma 5.1.3. *Ist $p \neq 3$ eine Primzahl mit $p \equiv 3 \mod 4$, so gilt*

$$h(-p) \leq \frac{p-1}{4}.$$

Beweis. Der Charakter $\left(\frac{n}{p}\right)$ gibt für $n \neq 0 \mod p$ an, ob n ein Quadrat modulo p ist. Gilt $a^2 = b^2$ in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, so ist $(a-b)(a+b) = 0$, also entweder $a = b$ oder $a = -b$. Daher sind genau die Hälfte der Elemente in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ Quadrate. Wir können also abschätzen:

$$\begin{aligned} h(-p) &\leq -\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j + \frac{1}{p}\sum_{j=\frac{p-1}{2}+1}^{p-1} j = -\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}+j\right) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p-1}{2} = \frac{(p-1)^2}{4p} = \frac{p-2}{4} + \frac{1}{4p} \leq \frac{p-2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{p-1}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

Die einfachen Gitter ungerader Primzahlstufe $p \neq 2$ hat Hagemeier in [Hag10] bestimmt. Wir ergänzen ihre Liste um die einfachen Gitter der Stufe 2 und erhalten:

Theorem 5.1.4. *Die einfachen geraden Gitter vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 4$ und Primzahlstufe p sind:*

Typ	*Stufe*	*Diskriminantengruppe*	*Gitter*
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$D_4(-1) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$D_4(-1) \oplus II_{1,1}(2) \oplus II_{1,1}$
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$	$D_4(-1) \oplus II_{1,1}(2) \oplus II_{1,1}(2)$
$(2,10)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$E_8(-1) \oplus II_{1,1}(2) \oplus II_{1,1}$
$(2,4)$	3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$A_2(-1) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$
$(2,4)$	3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$	$A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3) \oplus II_{1,1}$
$(2,4)$	3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$	$A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3) \oplus II_{1,1}(3)$
$(2,8)$	3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$E_6(-1) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$
$(2,6)$	5	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$A_4(-1) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$
$(2,8)$	7	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$	$A_6(-1) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$

Dabei ist $II_{1,1}$ die hyperbolische Ebene aus Beispiel 1.2.7. Die sogenannten Wurzelgitter A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 sind definiert wie in [Ebe02], Abschnitt 1.4. Weiter steht $L(n)$ für das skalierte Gitter (L, nq) und die direkten Summen sind orthogonal.

Beweis. Für die angegebenen Gitter rechnet man nach, dass $\dim(S_{1+b^-/2,\rho_L^*}) = 0$ ist. Um zu zeigen, dass es keine weiteren einfachen Gitter von Primzahlstufe gibt, muss man die Dimensionsformeln für $S_{1+b^-/2,\rho_L^*}$ geeignet abschätzen. Wir führen dies für den Fall $p = 2$ durch, da der Beweis für $p \neq 2$ ähnlich geht und in [Hag10], Abschnitt 5.1 und Anhang A zu finden ist. Im Fall $p \equiv 3 \mod 4, p \neq 3$, ℓ ungerade und $b^- = 8$ verwende man Lemma 5.1.3 statt der Abschätzung (A2) in [Hag10], Anhang A.

Außer den angegebenen gibt es keine weiteren Gitter vom Typ $(2, 6)$ und Stufe 2 (siehe dazu [CS99], Kapitel 15, Theorem 13, Tabelle 15.5). Für die übrigen Gitter vom Typ $(2, 10)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell, \ell = 4, 6, 8, 10, 12$, ergibt die Dimensionsformel nicht 0, d.h. diese Gitter sind nicht einfach.

Es bleibt zu zeigen, dass $\dim(S_{k,\rho_L^*}) > 0$ ist für Gitter der Stufe 2 vom Typ $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 14$. Wegen $r \equiv 0 \mod 4$ muss $b^- \equiv 2 \mod 4$ sein, und daher ist $\cos(-b^-\pi/12) \in \{0, \pm\sqrt{3}/2\}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- $b^- \equiv 6 \mod 8$: Dann ist $b^- \geq 14, k = 1 + b^-/2 \geq 8$ und $r \equiv 4 \mod 8$. Es folgt
$$\dim(S_{k,\rho_L^*}) = \frac{2^\ell k}{12} - \frac{2^\ell}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos\left(-\frac{b^-}{12}\pi\right) \geq \frac{2^\ell \cdot 8}{12} - \frac{2^\ell}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2^\ell - 1}{3} > 0.$$
- $b^- \equiv 2 \mod 8$: In diesem Fall ist $b^- \geq 18, k \geq 10$ und $r \equiv 0 \mod 8$. Es folgt
$$\begin{aligned}\dim(S_{k,\rho_L^*}) &= \frac{2^\ell k}{12} - \frac{2^\ell}{3} - 2^{(\ell-2)/2} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos\left(-\frac{b^-}{12}\pi\right) \\ &\geq \frac{2^\ell \cdot 10}{12} - \frac{2^\ell}{3} - 2^{(\ell-2)/2} - \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell/2} \cdot 6 \cdot (2^{\ell/2} - 1) - 4}{12} \geq \frac{1}{6} > 0.\end{aligned}$$

Damit gibt es außer den angegebenen keine weiteren einfachen Gitter der Stufe 2. □

5.2 Existenz automorpher Produkte singulären Gewichts

Wir wollen nun unter den oben bestimmten einfachen Gittern von Primzahlstufe diejenigen finden, zu denen es holomorphe automorphe Produkte singulären Gewichts gibt. Dabei beschränken wir uns auf Borcherdsinputs, deren Fourier-Koeffizienten $c(\gamma, n)$ für $n < 0$ nicht-negative ganze Zahlen sind.

Mithilfe der Formeln in Theorem 3.4.1 können wir die Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihe E für die einfachen Gitter aus Theorem 5.1.4 explizit berechnen und dann mit Satz 5.0.2 entscheiden, wann es automorphe Produkte singulären Gewichts gibt.

In den Formeln für $q(\gamma, n)$ tauchen getwistete Divisorsummen

$$\sigma_s(m, \chi) = \sum_{d|m} \chi(d) d^s$$

mit einem quadratischen Dirichlet-Charakter χ auf. Diese wollen wir zunächst geeignet abschätzen:

Lemma 5.2.1. *Sei χ ein quadratischer Dirichlet-Charakter. Für $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > 1$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $s < -1$ gilt*

$$\sigma_s(m, \chi) > \frac{1}{m}.$$

Beweis. Man kann sich leicht klar machen, dass die Divisorsumme multiplikativ in m ist, d.h. dass $\sigma_s(mn, \chi) = \sigma_s(m, \chi)\sigma_s(n, \chi)$ für teilerfremde ganze Zahlen $m, n > 0$ gilt. Daher reicht es zu zeigen, dass

$$\sigma_s(p^e, \chi) > p^{-e}$$

für jede Primzahl p und alle ganzen Zahlen $e \geq 1$ gilt. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach e. Für $e = 1$ gilt wegen $p \geq 2$ und $s < -1$:

$$\sigma_s(p, \chi) = 1 + \chi(p)p^s \geq 1 - p^s > p^{-1}.$$

Nehmen wir nun an, die Abschätzung gelte für ein $e \geq 1$. Dann folgt

$$\sigma_s(p^{e+1}, \chi) = \sigma_s(p^e, \chi) + \chi(p^{e+1})p^{(e+1)s} > p^{-e} - p^{(e+1)s} > p^{-(e+1)}.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Ist χ ein quadratischer Dirichlet-Charakter mod p für eine Primzahl p, so haben wir insbesondere

$$\sigma_s(m, \chi) = \sigma_s\left(\frac{m}{p^{\nu_p(m)}}, \chi\right) \geq \frac{p^{\nu_p(m)}}{m}$$

für $m \geq 1$ und $s < -1$, wobei $\nu_p(m) \geq 0$ die größte ganze Zahl ist, für die $p^{\nu_p(m)+1} \nmid m$ gilt. In der Abschätzung gilt genau dann Gleichheit, wenn m eine Potenz von p ist.

Theorem 5.2.2. *Für die in Theorem 5.1.4 bestimmten einfachen Gitter von Primzahlstufe existieren nur in den folgenden drei Fällen holomorphe automorphe Produkte singulären Gewichts, deren Borcherdsinputs nicht-negativen Hauptteil haben:*

- *Stufe* 2*, Typ* $(2,6)$*,* $\mathcal{L} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$*: Der Borcherdsinput hat Gewicht* -2 *und Hauptteil*
$$e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$$
für ein $\gamma \in \mathcal{L}$ *mit* $Q(\gamma) = 1/2 \mod 1$*.*

- *Stufe* 2*, Typ* $(2,10)$*,* $\mathcal{L} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$*: Der Borcherdsinput hat Gewicht* -4 *und Hauptteil*
$$e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$$
für das eindeutige $\gamma \in \mathcal{L}$ *mit* $Q(\gamma) = 1/2 \mod 1$*.*

- *Stufe* 3*, Typ* $(2,4)$*,* $\mathcal{L} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$*: Der Borcherdsinput hat Gewicht* -1 *und Hauptteil*
$$e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$$
für ein $\gamma \in \mathcal{L}$ *mit* $Q(\gamma) = 2/3 \mod 1$*.*

Beweis. Wir geben nur die Beweisidee an, da es sich hauptsächlich um einfache Abschätzungen und Rechnungen handelt. Für die drei angegebenen Gitter berechnen wir den Koeffizienten $q(\gamma, 1/p)$, wobei $\gamma \in \mathcal{L}$ ist mit $Q(\gamma) \equiv -1/p \mod 1$. Wir erhalten

Typ	Stufe	$\mathcal{L}$	$q(\gamma, 1/p)$
$(2,6)$	2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$	-8
$(2,10)$	2	$(\mathbb{Z})/2\mathbb{Z})^2$	-16
$(2,4)$	3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$	-2

Mit Satz 5.0.2 rechnet man nun leicht nach, dass die Borcherdsprodukte zu den im Theorem genannten vektorwertigen Modulformen jeweils singuläres Gewicht $b^-/2 - 1$ haben.

Man muss nun noch zeigen, dass es keine weiteren automorphen Produkte singulären Gewichts zu den einfachen Gittern von Primzahlstufe gibt. Dabei betrachten wir nur Borcherdsinputs, deren Koeffizienten $c(\gamma, n)$ für $n < 0$ nicht-negativ sind.

Wir schreiben im Folgenden $q_{1/p}$ für den Wert der Formel für $q(\gamma, 1/p)$ in Theorem 3.4.1. Beachte, dass nicht unbedingt ein $\gamma \in \mathcal{L}$ existiert mit $Q(\gamma) \equiv -1/p \mod 1$. Der Wert $q_{1/p}$ beschreibt also in manchen Fällen nicht den Fourier-Koeffizienten einer Eisensteinreihe.

Aus der Abschätzung der getwisteten Divisorsumme in Lemma 5.2.1 und den Formeln für die Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihen aus Theorem 3.4.1 folgt sofort

$$q(\beta, n) \leq (pn)^{k-2} q_{1/p}$$

für $\beta \in \mathcal{L}, \beta \neq 0$ und $n \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ mit $Q(\beta) \equiv -n \mod 1$. Für $\beta = 0$ und alle Gitter ungerader Primzahlstufe außer dem der Stufe 3 vom Typ $(2,4)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ gilt

$$|\delta p^{(1-\ell)/2} + S_\ell| \geq \frac{p^{(1-\ell)/2}}{p^{\nu_p(n)+1}},$$

was man am einfachsten für jedes der fünf Gitter einzeln mit den jeweiligen Werten von ℓ und k nachrechnet. Für die vier Gitter der Stufe 2 gilt

$$|(-1)^{-r/4}p^{1-\ell/2} + S_\ell| \geq \frac{p^{1-\ell/2}}{p^{\nu_p(n)+1}},$$

was man ebenfalls für jedes Gitter einzeln leicht prüft. Zusammen mit den Bemerkungen nach Lemma 5.2.1 folgt auch für $\beta = 0$ – mit Ausnahme des oben genannten Gitters der Stufe 3 – die Abschätzung

$$q(0,n) \leq (pn)^{k-2} q_{1/p}.$$

Wegen $k \geq 3$ wachsen die Fourier-Koeffizienten der Eisensteinreihen betragsmäßig also sehr schnell. Daher bleiben in Satz 5.0.2 höchstens endlich viele (und sogar sehr wenige) Möglichkeiten, die Koeffizienten $c(\gamma, n) > 0$ für $n < 0$ eines Borcherdsinputs F zu wählen, um singuläres Gewicht zu erreichen. Wir geben die ersten Koeffizienten der Eisensteinreihen zu den einfachen Gittern im Anhang an. Man sieht dann leicht, dass es außer den angegebenen Borcherdsinput keine weiteren geben kann, die auf automorphe Produkte singulären Gewichts führen.

Für das Gitter L der Stufe 3 vom Typ $(2,4)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ist $q(0,n) = 0$ für $n \equiv 2 \mod 3$. Für alle anderen $n \in \mathbb{N}$ gelten die Abschätzungen für $q(0,n)$ wie oben. Es sei F die vektorwertige Modulform zu ρ_L vom Gewicht -1 und Hauptteil

$$e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma},$$

deren Borcherdsprodukt Ψ singuläres Gewicht 1 hat. Dass $q(0,n) = 0$ ist für $n \equiv 2 \mod 3$ bedeutet, dass wir Terme der Form $c(0,n)e(-n\tau)\,\mathfrak{e}_0$ für beliebige $n, c(0,n) \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 2 \mod 3$ im Hauptteil von F hinzunehmen können, ohne das Gewicht des neuen Borcherdsproduktes Ψ_0 zu ändern. Wir wollen zeigen, dass Ψ und Ψ_0 konstante Vielfache voneinander sind. Die einzig möglichen neuen Nullstellen von Ψ_0 gegenüber Ψ liegen auf Heegner-Divisoren der Form

$$\bigcup_{\substack{\lambda \in L \\ q(\lambda)=n}} \lambda^\perp$$

mit $n \equiv -2 \mod 3$. Da es in L keine Vektoren mit $q(\lambda) \equiv -2 \mod 3$ gibt, haben Ψ und Ψ_0 die selben Nullstellen. Somit ist Ψ/Ψ_0 eine holomorphe Modulform vom Gewicht 0 und einem Charakter endlicher Ordnung. Das bedeutet, $(\Psi/\Psi_0)^m$ ist eine holomorphe Modulform vom Gewicht 0 und trivialem Charakter für ein geeignetes m, also konstant. Damit ist auch Ψ/Ψ_0 konstant. Dies zeigt, dass es nur die im Theorem genannten automorphen Produkte singulären Gewichts gibt, wenn man sich auf positiven Hauptteil des Borcherdsinputs beschränkt.

□

Im Beweis des letzten Theorems haben wir zwei vektorwertige Modulformen gesehen, deren Borcherdslifts sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Anders ausgedrückt ist der Borcherdslift der Differenz der beiden Modulformen konstant. Das ist möglich, da der Borcherdsinput nur solche von 0 verschiedenen Koeffizienten $c(\gamma, n) > 0$ im Hauptteil hat, für die die Koeffizienten $q(\gamma, -n)$ der Eisensteinreihe verschwinden. Nach Theorem 5.0.2 ist das Gewicht des automorphen Produkts dann 0. Da die $c(\gamma, n)$ nicht-negativ sind, ist das Borcherdsprodukt holomorph und daher konstant. Im Anhang konstruieren wir eine solche vektorwertige Modulform mit konstantem Borcherdslift explizit als Anhebung einer elliptischen Modulform.

5.3 Konstruktion automorpher Produkte singulären Gewichts

In Theorem 5.2.2 haben wir drei einfache Gitter gefunden, zu denen es automorphe Produkte singulären Gewichts gibt. Die vektorwertigen Modulformen, die als Inputs für den Borcherdslift dienen, existieren nach Theorem 5.0.1, da die Kontrollräume der drei Gitter trivial sind. Wir wollen nun diese vektorwertigen Modulformen expliziter angeben.

Das automorphe Produkt zu dem einfachen Gitter der Stufe 3 vom Typ $(2, 4)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ hat Hagemeier in [Hag10] gefunden. Die Konstruktion des zugehörigen Borcherdsinputs stellte den Ausgangspunkt dieser Arbeit dar, daher beginnen wir mit diesem Gitter. Anschließend betrachten wir das Gitter der Stufe 2 vom Typ $(2, 6)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. Es zeigt sich, dass die Konstruktion für dieses Gitter analog zu dem Gitter der Stufe 3 funktioniert.

Das automorphe Produkt singulären Gewichts zu dem einfachen Gitter der Stufe 2 vom Typ $(2, 10)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ wurde bereits ausführlich in [Bor98], Beispiel 13.7, und [Sch09], Abschnitt 8, beschrieben. Daher gehen wir darauf nicht weiter ein.

5.3.1 Das einfache Gitter der Stufe 3 vom Typ $(2, 4)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$

In diesem Abschnitt sei L ein gerades Gitter vom Typ $(2, 4)$ der Stufe 3 mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Wir können annehmen, dass

$$L = A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3) \oplus II_{1,1}(3)$$

gilt, wobei $A_2(-1)$ das Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit der quadratischen Form $q(x, y) = -x^2 - xy - y^2$ und $II_{1,1}(3)$ die skalierte hyperbolische Ebene $\mathbb{Z}^2$ mit der quadratischen Form $q(x, y) = 3xy$ bezeichnet. Es sei $\gamma \in \mathcal{L} = L'/L$ mit $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$. Wir wollen eine vektorwertige Modulform F zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht -1 und Hauptteil $e(-\tau/3)\, \mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\, \mathfrak{e}_{-\gamma}$ mittels

$$F_{\Gamma_1(3), f, \gamma} = \sum_{M \in \Gamma_1(3) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M^{-1})\, \mathfrak{e}_\gamma$$

als Anhebung einer elliptischen Modulform f zu $\Gamma_1(3)$ konstruieren (siehe Satz 3.3.1). Beachte, dass $\Gamma_1(3)$ zwei Spitzenbahnen hat, die wir als ∞ und 0 wählen können. Ist f

eine elliptische Modulform zu $\Gamma_1(3)$, so ist $f|_S$ eine Darstellung von f in der Spitze 0. Daher hat $f|_S$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f|_S(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n e(n\tau/3)$$

mit $b_n \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $f|_S = g_0 + g_{1/3} + g_{2/3}$ mit

$$g_\ell(\tau) = \sum_{\substack{n=n_0 \\ n/3 \equiv \ell \bmod 1}}^{\infty} b_n e(n\tau/3).$$

Wir geben nun eine explizitere Darstellung des $\Gamma_1(3)$-Lifts an, um besser ablesen zu können, wie sich Eigenschaften von f auf den Lift $F_{\Gamma_1(3),f,\gamma}$ übertragen:

Satz 5.3.1. *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$. Weiter sei $f \in M_k^!(\Gamma_1(3), \chi_\gamma)$ eine fast holomorphe Modulform zu $\Gamma_1(3)$ vom Gewicht k und Charakter $\chi_\gamma(M) = e(-b/3)$. Schreibe $f|_S = g_0 + g_{1/3} + g_{2/3}$. Dann ist der $\Gamma_1(3)$-Lift von f bei $\mathfrak{e}_\gamma$ gegeben durch*

$$F_{\Gamma_1(3),f,\gamma} = f\,\mathfrak{e}_\gamma + f\,\mathfrak{e}_{-\gamma} - \frac{3i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} \big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\big) g_{Q(\beta)}\,\mathfrak{e}_\beta\,.$$

Insbesondere sind die Komponentenfunktionen des Lifts gegeben durch

$$f_\beta = -\frac{3i}{\sqrt{243}} \big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\big) g_{Q(\beta)}$$

für $\beta \neq \pm\gamma$ und

$$f_\gamma = f_{-\gamma} = f + \frac{3i}{\sqrt{243}} g_{2/3}.$$

Beweis. Man kann die Formel mithilfe von Theorem 3.7 in [Sch11] berechnen.

Wir wollen die Formel hier elementarer beweisen, indem wir als Repräsentantensystem für $\Gamma_1(3) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die 8 Matrizen

$$\pm I,\ \pm S,\ \pm ST,\ \pm ST^{-1}$$

wählen und die Wirkung dieser Matrizen mittels der Definition der Weil-Darstellung ausrechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(I^{-1})\,\mathfrak{e}_\gamma &= \mathfrak{e}_\gamma, \\
\rho(S^{-1})\,\mathfrak{e}_\gamma &= -\frac{i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e((\beta,\gamma))\,\mathfrak{e}_\beta, \\
\rho((ST)^{-1})\,\mathfrak{e}_\gamma &= -\frac{i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(-Q(\beta)) e((\beta,\gamma))\,\mathfrak{e}_\beta, \\
\rho((ST^{-1})^{-1})\,\mathfrak{e}_\gamma &= -\frac{i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e(Q(\beta)) e((\beta,\gamma))\,\mathfrak{e}_\beta\,.
\end{aligned}$$

Die Wirkungen der Matrizen $-I, -S, -ST, -ST^{-1}$ sehen ähnlich aus: multipliziere die rechten Seiten mit -1 und ersetze γ durch $-\gamma$. Nun ist der $\Gamma_1(3)$-Lift $F_{\Gamma_1(3),f,\gamma}$ der Modulform f bei $\mathfrak{e}_\gamma$ gegeben durch

$$F_{\Gamma_1(3),f,\gamma} = f\,\mathfrak{e}_\gamma + f\,\mathfrak{e}_{-\gamma} - \frac{i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta\in\mathcal{L}} \big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\big) \\ \Big(f|_S(\tau) + e(-Q(\beta))f|_S(\tau+1) + e(Q(\beta))f|_S(\tau-1)\Big)\,\mathfrak{e}_\beta\,.$$

Ist $f|_S(\tau) = \sum_{n=n_0}^\infty b_n e(n\tau/3)$ die Fourier-Entwicklung von $f|_S$, so haben wir

$$f|_S(\tau) + e(-Q(\beta))f|_S(\tau+1) + e(Q(\beta))f|_S(\tau-1) = \\ \sum_{n=n_0}^\infty \big(1 + e(-Q(\beta)+n/3) + e(Q(\beta)-n/3)\big) b_n e(n\tau/3).$$

Da $e(Q(\beta) - n/3)$ und $e(-Q(\beta) + n/3)$ dritte Einheitswurzeln sind, gilt

$$1 + e(-Q(\beta)+n/3) + e(Q(\beta)-n/3) = \begin{cases} 3, & \text{falls } Q(\beta) = n/3 \mod 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit

$$f|_S(\tau) + e(-Q(\beta))f|_S(\tau+1) + e(Q(\beta))f|_S(\tau-1) = \sum_{\substack{n=n_0\\ n/3\equiv Q(\beta) \bmod 1}}^\infty 3b_n e(n\tau/3).$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist $3g_{Q(\beta)}$. Es ergibt sich die angegebene Formel. □

Die Formel gibt einen Hinweis darauf, wie wir $f \in M^!_{-1}(\Gamma_1(3), \chi_\gamma)$ wählen sollten: Hat f eine Fourier-Entwicklung der Form $f = e(-\tau/3) + \dots$ und ist in der Spitze 0 holomorph, so ist der $\Gamma_1(3)$-Lift von f bei $\mathfrak{e}_\gamma$ nach der obigen Formel eine vektorwertige Modulform vom Gewicht -1 mit Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$. Da eine vektorwertige Modulform negativen Gewichts durch ihren Hauptteil eindeutig festgelegt ist, ist der Lift von f genau die vektorwertige Modulform, die wir suchen. Ein solcher Input f für den $\Gamma_1(3)$-Lift sollte also $\mathrm{ord}_\infty(f) = -1/3$ und $\mathrm{ord}_0(f) \geq 0$ erfüllen. Mit der Gewichtsformel (siehe Satz 2.3) folgt, dass $\mathrm{ord}_0(f) = 0$ sein muss und f keine Nullstellen auf $\mathbb{H}$ haben darf. Dies legt nahe, es mit Eta-Produkten zu versuchen. Tatsächlich hat das Eta-Produkt $\eta(\tau)/\eta(3\tau)^3$ aus Beispiel 2.4.3 die gewünschten Eigenschaften und ist daher ein geeigneter Input. Wir halten fest:

Theorem 5.3.2. *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$. Der $\Gamma_1(3)$-Lift $F = F_{\Gamma_1(3),f,\gamma}$ des Eta-Produkts*

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)^3} = q^{-1/3} - q^{2/3} - q^{5/3} + 3q^{8/3} - 3q^{11/3} + \dots$$

(mit $q = e^{2\pi i\tau}$) bei $\mathfrak{e}_\gamma$ ist eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht -1 mit Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$. Definiere

$$\begin{aligned} f_S(\tau) &= \frac{1}{3\sqrt{3}i} f|_S(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/3)^3} = 1 + 3q^{1/3} + 9q^{2/3} + 21q + 48q^{4/3} + 99q^{5/3} + \ldots \\ &= f_{S,0} + f_{S,1/3} + f_{S,2/3}. \end{aligned}$$

Dann sind die Komponentenfunktionen von F gegeben durch

$$f_\beta = \big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\big) f_{S,Q(\beta)}$$

für $\beta \neq \pm\gamma$ und

$$f_\gamma = f_{-\gamma} = f - f_{S,2/3}.$$

Insbesondere sind die Fourier-Koeffizienten von F ganzzahlig.

Die Fourier-Koeffizienten der Eta-Produkte können numerisch leicht berechnet werden, d.h. wir können auch die Koeffizienten des Lifts F leicht berechnen.

Bemerkung. Man kann die Komponentenfunktionen f_β der gesuchten vektorwertigen Modulform F auch durch Theta-Funktionen und Eta-Produkte zu $\Gamma_1(3)$ ausdrücken. Dies wollen wir kurz erklären:

Aus dem Transformationsverhalten von F unter S und der Festlegung des Hauptteils

$$e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$$

folgt $\mathrm{ord}_\infty(f_\beta) \geq 0$ und $\mathrm{ord}_0(f_\beta) = -1/3$ für $\beta \neq \pm\gamma$. Wir schreiben im Folgenden $[Q(\beta)]$ für den Repräsentanten von $Q(\beta)$ in $[0,1]$. Aus der Gewichtsformel (2.3) für $\Gamma_1(3)$ folgt, dass $\mathrm{ord}_\infty(f) = [Q(\beta)]$ sein muss und dass der Raum $\mathcal{M}$ der elliptischen Modulformen f zu $\Gamma_1(3)$ vom Gewicht -1 und Charakter χ_β mit $\mathrm{ord}_\infty(f) = [Q(\beta)]$ und $\mathrm{ord}_0(f) = -1/3$ Dimension 1 hat. Man kann f_β für $\beta \neq \pm\gamma$ also bestimmen, indem man zunächst eine Modulform f aus $\mathcal{M}$ geschickt rät und dann geeignet skaliert. Den passenden Faktor findet man durch Vergleichen des ersten Fourier-Koeffizienten von f mit dem ersten Koeffizienten von f_β, den man aus dem letzten Theorem erhält.

Es sei Θ_{A_2} die Theta-Funktion zu A_2 wie in Beispiel 2.2.4. Θ_{A_2} ist eine holomorphe Modulform zu $\Gamma_1(3)$ vom Gewicht -1 mit trivialem Charakter und $\mathrm{ord}_\infty(\Theta_{A_2}) = \mathrm{ord}_0(\Theta_{A_2}) = 0$. Man kann nun leicht nachprüfen, dass die Komponentenfunktionen f_β von F folgendermaßen gegeben sind:

1. Für $Q(\beta) = 0 \mod 1$:

$$f_\beta(\tau) = \Big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\Big) \cdot \Theta_{A_2}^2 \cdot \frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)^9}.$$

2. Für $Q(\beta) = 1/3 \mod 1$:

$$f_\beta(\tau) = 3\Big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\Big) \cdot \Theta_{A_2} \cdot \frac{\eta(3\tau)^6}{\eta(\tau)^{10}}.$$

3. Für $Q(\beta) = 2/3 \mod 1$ mit $\beta \neq \pm\gamma$:
$$f_\beta(\tau) = 9\Big(e((\beta,\gamma)) + e(-(\beta,\gamma))\Big) \cdot \frac{\eta(3\tau)^9}{\eta(\tau)^{11}}.$$

4. Für $\beta = \pm\gamma$:
$$f_\gamma(\tau) = f_{-\gamma}(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)^3} - 9\frac{\eta(3\tau)^9}{\eta(\tau)^{11}}.$$

Wir wollen jetzt Produkt- und Reihenentwicklungen des Borcherdslifts Ψ von F in verschiedenen Spitzen $z \in L$ herleiten. Sei also $z \in L$ eine primitive und isotrope Spitze. Nach Satz 1.2.6 hat z entweder Stufe 1 oder Stufe 3. Stufe 1 kann aber nicht auftreten, da wir andernfalls L nach Satz 1.2.8 als orthogonale Summe $L = K \oplus II_{1,1}$ schreiben könnten und dann K ein Gitter vom Rang 4 mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ wäre. Ein solches Gitter K existiert nicht.

Somit hat z Stufe 3. Nach Satz 1.2.8 können wir ein primitives und isotropes $\zeta \in L$ wählen mit $\langle z,\zeta\rangle = 3$ und L als orthogonale Summe $L = K \oplus II_{1,1}(3)$ schreiben, wobei $II_{1,1}(3)$ von z und ζ erzeugt wird. Dann ist K ein Gitter von Typ $(1,3)$. Wir setzen $z' = \zeta/3 \in L'$. Nach dem Theorem von Borcherds hat die automorphe Form Ψ zu F in der Spitze z eine Produkt-Entwicklung der Form
$$\Psi_z(Z) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda\in K' \\ (\lambda,W)>0}} \prod_{\substack{\delta \in L_0'/L \\ p(\delta)=\lambda+K}} \big(1 - e((\delta, z') + (\lambda, Z))\big)^{c(\delta, q(\lambda))}$$
wobei W eine Weyl-Kammer des positiven Kegels $C \subseteq K \otimes \mathbb{R}$, ρ der zugehörige Weyl-Vektor und $c(\delta, q(\lambda))$ die Fourier-Koeffizienten von F sind. Da ζ orthogonal zu K steht, ist $\zeta_K = 0$ und $p(\lambda) = \lambda_K$ für $\lambda \in L_0'$. Daher ist ein Repräsentantensystem der $\delta \in L_0'/L$ mit $p(\delta) = \lambda + K$ gegeben durch die drei Vektoren $\lambda, \lambda + z/3, \lambda + 2z/3 \in L_0'$. Da außerdem $\langle z, z'\rangle = 1$ ist, erhalten wir die Produktentwicklung
$$\begin{aligned}\Psi_z(Z) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda\in K' \\ (\lambda,W)>0}} & \big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{c(\lambda+L, q(\lambda))} \\ & \times \big(1 - e(1/3)e((\lambda, Z))\big)^{c(\lambda+z/3+L, q(\lambda))} \\ & \times \big(1 - e(2/3)e((\lambda, Z))\big)^{c(\lambda+2z/3+L, q(\lambda))}.\end{aligned}$$
Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden $c(\lambda, q(\lambda))$ statt $c(\lambda + L, q(\lambda))$.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $(z,\gamma) \equiv 0 \mod 3$ und $(z,\gamma) \not\equiv 0 \mod 3$, wobei $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$ die singuläre Komponente von F ist, und bestimmen jeweils eine Fourier-Entwicklung von Ψ_z (dabei schreiben wir $(z,\gamma) := \langle z, g\rangle \mod 3$ für einen Repräsentanten $g \in L'$ von γ; dies ist modulo 3 wohldefiniert, da z Stufe 3 hat).

Theorem 5.3.3. *Sei $z \in L$ eine primitive isotrope Spitze der Stufe* 3 *mit* $(z,\gamma) \not\equiv 0 \mod 3$ *und seien z', ζ und K wie oben. Weiter sei*
$$f_S(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\tau/3)^3} = 1 + 3q^{1/3} + 9q^{2/3} + 21q + 48q^{4/3} + 99q^{5/3} + 198q^2 + \dots$$

Wir schreiben $[f_S](n)$ für den Koeffizienten bei q^n in der Fourier-Entwicklung von f_S. Es sei C der positive Kegel in $K \otimes \mathbb{R}$ und $K'^+ = (K' \cap \overline{C}) \setminus \{0\}$. Dann hat Ψ_z die Produkt- und Fourier-Entwicklungen

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\lambda \in K'^+} \frac{\big(1 - e(-(\lambda,\gamma)(z,\gamma))e((\lambda,Z))\big)^{3[f_S](q(\lambda))}}{\big(1 - e(3(\lambda,Z))\big)^{[f_S](q(\lambda))}} = 1 + \sum_{\lambda \in K'^+} c(\lambda) e((\lambda,Z)),$$

wobei $c(\lambda)$ nur dann ungleich 0 ist, wenn $\lambda = n\mu$ für ein primitives isotropes $\mu \in K'^+$ gilt, in welchem Fall $c(\lambda)$ gleich $e(-(\lambda,\gamma)(z,\gamma))$ mal dem Koeffizienten bei q^n in

$$\frac{\eta(\tau)^3}{\eta(3\tau)} = 1 - 3q + 6q^3 - 3q^4 - 6q^7 + 6q^9 + 6q^{12} + \ldots$$

ist.

Beweis. Wegen $(\gamma, z) \neq 0 \mod 3$ ist die Reduktion F_K von F auf K identisch 0. Daher ist die einzige Weyl-Kammer der positive Kegel C und der Weyl-Vektor ρ ist 0. Man macht sich leicht klar, dass dann die Menge aller $\lambda \in K'$ mit $(\lambda, C) > 0$ gleich K'^+ ist, d.h. das Produkt läuft über K'^+. Da jeder Vektor in K'^+ auf eindeutige Weise als positives Vielfaches eines primitiven Vektors in K'^+ geschrieben werden kann, können wir die Produktdarstellung von Ψ_z umformen zu

$$\begin{aligned}\Psi_z(Z) = \prod_{\substack{\mu \in K'^+ \\ \mu \text{ primitiv}}} \prod_{n>0} &\big(1 - e((n\mu, Z))\big)^{c(n\mu, q(n\mu))} \\ &\times \big(1 - e(1/3)e((n\mu, Z))\big)^{c(n\mu + z/3, q(n\mu))} \\ &\times \big(1 - e(2/3)e((n\mu, Z))\big)^{c(n\mu + 2z/3, q(n\mu))}.\end{aligned}$$

Wir teilen das Produkt über die primitiven Vektoren $\mu \in K'^+$ in drei Teile auf, indem wir nach $(\mu, \gamma) = 0 \mod 1, (\mu, \gamma) = 1/3 \mod 1$ und $(\mu, \gamma) = 2/3 \mod 1$ unterscheiden. Die drei Produkte berechnen wir nun getrennt. Für $(\mu, \gamma) = 0 \mod 3$ gilt

$$\begin{aligned}c(n\mu, q(n\mu)) &= \big(e((n\mu,\gamma)) + e(-(n\mu,\gamma))\big)[f_S](q(n\mu)) \\ &= 2[f_S](q(n\mu)), \\ c(n\mu + z/3, q(n\mu)) &= \big(e((n\mu + z/3,\gamma)) + e(-(n\mu + z/3,\gamma))\big)[f_S](q(n\mu)) \\ &= -[f_S](q(n\mu)), \\ c(n\mu + 2z/3, q(n\mu)) &= \big(e((n\mu + 2z/3,\gamma)) + e(-(n\mu + 2z/3,\gamma))\big)[f_S](q(n\mu)) \\ &= -[f_S](q(n\mu)).\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $n\mu + az/3$ für $a = 0, 1, 2$ wegen $(z, \gamma) \not\equiv 0 \mod 3$ und $(z, n\mu + az/3) = 0$ kein Repräsentant von γ ist. Das erste Produkt vereinfacht sich daher zu

$$\prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu\text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=0 \bmod 1}} \prod_{n>0} \frac{\big(1-e((n\mu,Z))\big)^{2[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(1/3)e((n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}\big(1-e(2/3)e((n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}$$

$$= \prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu\text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=0 \bmod 1}} \prod_{n>0} \frac{\big(1-e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Nun zum zweiten Produkt über die primitiven $\mu \in L'^+$ mit $(\mu,\gamma) = 1/3 \mod 1$. In diesem Fall gilt:

$$c(n\mu, q(n\mu)) = \begin{cases} 2[f_S](q(n\mu)), & \text{falls } n \equiv 0 \mod 3, \\ -[f_S](q(n\mu)), & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$c(n\mu + z/3, q(n\mu)) = \begin{cases} 2[f_S](q(n\mu)), & \text{falls } n \equiv -(z,\gamma) \mod 3, \\ -[f_S](q(n\mu)), & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$c(n\mu + 2z/3, q(n\mu)) = \begin{cases} 2[f_S](q(n\mu)), & \text{falls } n \equiv (z,\gamma) \mod 3, \\ -[f_S](q(n\mu)), & \text{sonst}. \end{cases}$$

Das zweite Produkt lässt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu\text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=1/3 \bmod 1}} \quad & \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv 0 \bmod 3}} \big(1-e((n\mu,Z))\big)^{2[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(1/3)e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(2/3)e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))} \\
\times & \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv (z,\gamma) \bmod 3}} \big(1-e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(1/3)e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(2/3)e((n\mu,Z))\big)^{2[f_S](q(n\mu))} \\
\times & \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv -(z,\gamma) \bmod 3}} \big(1-e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(1/3)e((n\mu,Z))\big)^{2[f_S](q(n\mu))} \\
& \qquad \times\big(1-e(2/3)e((n\mu,Z))\big)^{-[f_S](q(n\mu))}.
\end{aligned}$$

Wir erweitern mit den Ausdrücken, die eine 2 im Exponenten haben, und erhalten

$$\prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu \text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=1/3 \bmod 1}} \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv 0 \bmod 3}} \frac{\big(1-e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}$$
$$\times \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv (z,\gamma) \bmod 3}} \frac{\big(1-e(2/3)e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}$$
$$\times \prod_{\substack{n>0\\ n\equiv -(z,\gamma) \bmod 3}} \frac{\big(1-e(1/3)e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Wegen

$$e(-n(\mu,\gamma)(z,\gamma)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n\equiv 0 \mod 3,\\ e(2/3), & \text{falls } n\equiv (z,\gamma) \mod 3,\\ e(1/3), & \text{falls } n\equiv -(z,\gamma) \mod 3,\end{cases}$$

können wir das Produkt zusammenfassen zu

$$\prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu \text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=1/3 \bmod 1}} \prod_{n>0} \frac{\big(1-e(-n(\mu,\gamma)(z,\gamma))e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Das dritte Produkt über die primitiven $\mu\in K'^+$ mit $(\mu,\gamma)=2/3 \mod 1$ lässt sich analog umformen und man erhält

$$\prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu \text{ primitiv}\\ (\mu,\gamma)=2/3 \bmod 1}} \prod_{n>0} \frac{\big(1-e(-n(\mu,\gamma)(z,\gamma))e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Ist $(\mu,\gamma)=0 \mod 1$, so ist $e(-n(\mu,\gamma)(z,\gamma))=1$ für alle $n>0$. Wir können diesen Faktor also im Zähler des ersten Produktes einbauen. Dann kann man die drei Produkte wieder zusammenfassen und erhält

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\substack{\mu\in K'^+\\ \mu \text{ primitiv}}} \prod_{n>0} \frac{\big(1-e(-n(\mu,\gamma)(z,\gamma))e((n\mu,Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1-e(3(n\mu,Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Das ergibt die angegebene Produktentwicklung von Ψ_z.

Nun wollen wir die Reihenentwicklung von Ψ_z bestimmen. Da Ψ_z singuläres Gewicht hat, besitzt Ψ_z eine Fourier-Entwicklung der Form

$$\Psi_z(Z) = 1 + \sum_{\substack{\lambda \in K'^+ \\ q(\lambda)=0}} c(\lambda) e((\lambda, Z))$$

mit $c(\lambda) \in \mathbb{C}$. Sei $\lambda \in K'^+$ mit $q(\lambda) = 0$. Wir wollen $c(\lambda)$ bestimmen. Sind $\lambda_i \in K'^+$ mit $\sum \lambda_i = \lambda$, d.h. die λ_i tauchen im Produkt auf und liefern Beiträge zu $c(\lambda)$, so gilt $\sum \langle \lambda_i, \lambda \rangle = \langle \lambda, \lambda \rangle = 0$. Wegen $\lambda_i, \lambda \in K'^+$ gilt auch $\langle \lambda_i, \lambda \rangle \geq 0$, also $\langle \lambda_i, \lambda \rangle = 0$. Somit sind λ, λ_i positive Vielfache des selben primitiven Vektors $\mu \in K'^+$. Beiträge zu $c(\lambda)$ kommen daher von dem Produkt

$$\prod_{n>0} \frac{\big(1 - e(-(n\mu, \gamma)(z, \gamma)) e((n\mu, Z))\big)^{3[f_S](q(n\mu))}}{\big(1 - e(3(n\mu, Z))\big)^{[f_S](q(n\mu))}}.$$

Mit $[f_S](q(n\mu)) = [f_S](0) = 1$ und $e(-3(n\mu, \gamma)(z, \gamma)) = 1$ lässt sich das Produkt umschreiben zu

$$\prod_{n>0} \frac{\big(1 - e(-(n\mu, \gamma)(z, \gamma)) e((n\mu, Z))\big)^3}{1 - e(-3(n\mu, \gamma)(z, \gamma)) e(3(n\mu, Z))}.$$

Vergleichen wir dies mit der Produktentwicklung

$$\frac{\eta(\tau)^3}{\eta(3\tau)} = \prod_{n>0} \frac{(1 - e(n\tau))^3}{1 - e(3n\tau)},$$

so sehen wir, dass die Beiträge zu $c(\lambda)$ für $\lambda = n\mu$ vom Koeffizienten bei q^n in

$$\frac{\eta(\tau - (\mu, \gamma)(z, \gamma))^3}{\eta(3(\tau - (\mu, \gamma)(z, \gamma)))}$$

kommen. Diesen Koeffizienten erhält man aus $e(-n(\mu, \gamma)(z, \gamma))$ mal den Koeffizienten bei q^n in $\eta(\tau)^3/\eta(3\tau)$. Damit hat Ψ_z die angegebene Fourier-Entwicklung. □

Wir betrachten nun folgenden Spezialfall: Wähle primitive isotrope $z, \zeta \in L$ mit $\langle z, \zeta \rangle = 3$, so dass sich $L = K \oplus II_{1,1}(3)$ als orthogonale direkte Summe schreiben lässt und $II_{1,1}(3)$ von z und ζ erzeugt wird. Setze anschließend $\gamma = z/3 - \zeta/3 + L$. Dann ist $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$ und $(\lambda, \gamma) = 0 \mod 1$ für alle $\lambda \in K'^+$. Mit dem letzten Theorem erhalten wir die Entwicklung

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\lambda \in K'^+} \frac{\big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{3[f_S](q(\lambda))}}{\big(1 - e(3(\lambda, Z))\big)^{[f_S](q(\lambda))}} = 1 + \sum_{\lambda \in K'^+} c(\lambda) e((\lambda, Z)),$$

wobei $c(\lambda)$ der Koeffizient bei q^n von $\eta(\tau)^3/\eta(3\tau)$ ist, falls $\lambda = n\mu$ für ein primitives isotropes $\mu \in K'^+$, und 0 andernfalls. Diese Gleichung ist die Nenneridentität einer verallgemeinerten Kac-Moody-Algebra, und wurde bereits in [Sch01], Proposition 6.10, beschrieben.

Sei nun $(z, \gamma) \equiv 0 \mod 3$. Die Reduktion F_K ist in diesem Fall nicht identisch 0. Genauer ist F_K eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_K vom Gewicht -1 und Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{p(\gamma)} + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-p(\gamma)}$. Die Funktion Φ_K hat Singularitäten auf dem Heegner Divisor

$$H(p(\gamma), -1/3) = \bigcup_{\substack{\alpha \equiv p(\gamma) \bmod K \\ q(\alpha) = -1/3}} \alpha^\perp,$$

also auf den Hyperebenen $\alpha^\perp$ für $\alpha \in K'$ mit $q(\alpha) = -1/3$ und $\alpha + K = p(\gamma)$. Wir bezeichnen mit G die Untergruppe von $O(K)$, die von den Spiegelungen

$$\sigma_\alpha(x) = x - \frac{(\alpha, x)}{q(\alpha)}\alpha$$

entlang dieser α erzeugt wird und nennen G die Weyl-Gruppe zu F. Die Weyl-Kammern zu F sind genau die Zusammenhangskomponenten des positiven Kegels C nach Entfernen der Spiegelungshyperebenen $\alpha^\perp$. Die Weyl-Gruppe G wirkt einfach transitiv auf den Weyl-Kammern, d.h. zu je zwei Weyl-Kammern W_1, W_2 gibt es genau eine Isometrie $\sigma \in G$ mit $\sigma(W_1) = W_2$.

Wir beschränken uns auf folgenden Spezialfall: Wähle primitive isotrope $x, \xi \in K$ mit $\langle x, \xi \rangle = 3$, die die hyperbolische Ebene in $K = A_2(-1) \oplus II_{1,1}(3)$ erzeugen. Setze $\gamma = x/3 - \xi/3 + L$ und betrachte das automorphe Produkt Ψ zum Borcherdsinput mit Hauptteil $e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_\gamma + e(-\tau/3)\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$. Dann ist $Q(\gamma) = -1/3 \mod 1$ und $(z, \gamma) \equiv 0 \mod 3$.

Theorem 5.3.4. *Wähle eine Weyl-Kammer W, deren Abschluss x enthält. Dann ist der Weyl-Vektor $\rho = \frac{1}{3}x$ ein primitiver isotroper Vektor von K' und Ψ_z hat die Produkt- und Fourier-Entwicklungen*

$$\Psi_z(Z) = e((\rho, Z)) \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0}} \big(1 - e(3(\lambda, Z))\big)^{\big(e((\lambda,\gamma)) + e((-\lambda,\gamma))\big)[f_S](q(\lambda))}$$
$$\times \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0 \\ \lambda \equiv \gamma \bmod L}} (1 - e((\lambda, Z)))^{[f](q(\lambda))}$$
$$= \sum_{\sigma \in G} \det(\sigma) \frac{\eta(9(\sigma(\rho), Z))^3}{\eta(3(\sigma(\rho), Z))},$$

wobei G die Weyl-Gruppe zu F ist, also die Untergruppe von $O(K)$, die von den Spiegelungen entlang der Vektoren

$$\alpha \in K' \text{ mit } q(\alpha) = -1/3 \text{ und } \alpha + K = p(\gamma)$$

erzeugt wird.

Beweis. Mittels [Bor98], Theorem 10.4, kann man nachrechnen (da die dort mit F_K bezeichnete Funktion wegen $(x, p(\gamma)) \not\equiv 0 \mod 3$ identisch 0 ist), dass der Weyl-Vektor durch $\rho = \frac{1}{3}x$ gegeben ist, sofern man eine Weyl-Kammer W wählt, deren Abschluss x enthält (beachte, dass die Formel in Theorem 10.4 einen Fehler enthält, den Borcherds in der Einleitung von [Bor00] korrigiert: In der Summe bei ρ_z muss die Bedingung $(\lambda, W) > 0$ entfernt werden und der Faktor $\frac{1}{2}$ vor der Summe muss durch $\frac{1}{4}$ ersetzt werden). Für die folgende Argumentation werden wir benutzen, dass $\rho = \frac{1}{3}x$ ein primitiver isotroper Vektor in K' ist, der im Abschluss von W liegt, und für den $(\rho, \gamma) \neq 0 \mod 1$ gilt.

Wir bestimmen nun die Fourier-Entwicklung des automorphen Produkts: Zunächst hat Ψ_z eine Entwicklung der Form

$$\Psi_z(Z) = \sum_{\substack{\lambda \in \rho + K' \\ \lambda \in \overline{C}}} c(\lambda) e((\lambda, Z)).$$

Man kann eine Spiegelung $\sigma_\alpha \in G$ auch als Spiegelung in $O(L)$ auffassen, wenn man $\alpha \in L$ interpretiert. Als Element von L ist $\alpha \equiv \gamma \mod L$ (hier benutzen wir die spezielle Wahl von γ, denn das ist im Allgemeinen falsch für beliebige γ mit $(z, \gamma) \equiv 0 \mod 3$). Eine einfache Rechnung zeigt $\sigma_\alpha(Z)_L = \sigma_\alpha(Z_L)$. Daraus folgt

$$\Psi_z(\sigma_\alpha(Z)) = \Psi(\sigma_\alpha(Z)_L) = \Psi(\sigma_\alpha(Z_L)) = \chi(\sigma_\alpha)\Psi(Z_L) = \chi(\sigma_\alpha)\Psi_z(Z).$$

Da Ψ Nullstellen der Ordnung 1 auf der durch α definierten Spiegelungshyperebene hat, ist $\chi(\sigma_\alpha) = -1$ (siehe dazu die Bemerkungen in [Bor98] nach Theorem 13.3). Somit ist die Funktion Ψ_z antisymmetrisch unter der Weyl-Gruppe G, d.h. es gilt

$$\Psi_z(\sigma(Z)) = \det(\sigma)\Psi_z(Z)$$

für $\sigma \in G$. Daraus folgt

$$c(\sigma(\lambda)) = \det(\sigma) c(\lambda).$$

Insbesondere ist $c(\lambda) = 0$ für Vektoren $\lambda \in K'$, die auf der Wand zweier benachbarter Weyl-Kammern liegen; wähle dafür eine Spiegelung an der Wand der beiden Kammern. Da die Weyl-Gruppe einfach transitiv auf den Weyl-Kammern wirkt, lässt sich die Fourier-Entwicklung von Ψ_z umschreiben zu

$$\Psi_z(Z) = \sum_{\sigma \in G} \det(\sigma) \sum_{\substack{\lambda \in \rho + K' \\ \lambda \in \overline{W}}} c(\lambda) e((\sigma(\lambda), Z)).$$

Wir wollen $c(\lambda)$ bestimmen. Da Ψ_z singuläres Gewicht hat, ist $c(\lambda) \neq 0$ nur für Vektoren mit $q(\lambda) = 0$ möglich. Sei also $\lambda = \rho + \mu \in \rho + K'$ mit $\lambda \in \overline{W}$ und $q(\lambda) = 0$. Die Produktdarstellung zeigt, dass $c(\lambda) \neq 0$ auch $(\mu, W) > 0$ impliziert. Wir haben

$$\langle \mu, \rho \rangle = q(\rho + \mu) - q(\mu) - q(\rho) = -q(\mu).$$

Weiter ist $\langle \mu, \rho + \mu \rangle \geq 0$ wegen $(\mu, W) > 0$. Daraus folgt

$$\langle \mu, \rho \rangle = \langle \mu, \rho + \mu \rangle - \langle \mu, \mu \rangle \geq -2q(\mu).$$

Somit muss $q(\mu) \geq 0$ und $\langle \mu, \rho \rangle \leq 0$ sein. Da ρ im Abschluss der Weyl-Kammer liegt, gilt auch $\langle \mu, \rho \rangle \geq 0$. Insgesamt ist $\langle \mu, \rho \rangle = 0$ und $q(\mu) = 0$.

Ist $\mu = \sum \lambda_i$ mit $\lambda_i \in K'$ und $(\lambda_i, W) > 0$ (d.h. die λ_i liefern im Produkt Beiträge zu $c(\lambda)$), so gilt $\langle \lambda_i, \rho \rangle \geq 0$ und $\sum \langle \lambda_i, \rho \rangle = \langle \mu, \rho \rangle = 0$, also $\langle \lambda_i, \rho \rangle = 0$. Nehmen wir an, es sei $q(\lambda_i) < 0$. Da λ_i einen Beitrag im Produkt liefert, muss der Koeffizient $c(\lambda_i + az/3, q(\lambda_i))$ von F für ein $a \in \{0, 1, 2\}$ positiv sein. Dies ist nur möglich wenn $\lambda_i + az/3 \equiv \pm\gamma \mod L$ ist. Dann wäre aber $(\lambda_i, \rho) \equiv (\lambda_i + az/3, \rho) \equiv \pm(\gamma, \rho) \not\equiv 0 \mod 1$, also $(\lambda_i, \rho) \neq 0$, ein Widerspruch. Damit muss $q(\lambda_i) \geq 0$ gelten, d.h. λ_i liegt im Abschluss des positiven Kegels.

Daher sind μ, λ_i und ρ positive Vielfache des selben primitiven Vektors in $\overline{C}$, also positive Vielfache von ρ. Beiträge zu $c(\lambda)$ kommen im Produkt also von

$$\begin{aligned} e((\rho, Z)) \prod_{m>0} &(1 - e((m\rho, Z)))^{c(m\rho,0)} \\ &\times (1 - e(1/3)e((m\rho, Z)))^{c(m\rho+z/3,0)} \\ &\times (1 - e(2/3)e((m\rho, Z)))^{c(m\rho+2z/3,0)}. \end{aligned}$$

Wegen $(z, \gamma) \equiv 0 \mod 3$ und $(\rho, \gamma) \not\equiv 0 \mod 1$ haben wir

$$\begin{aligned} c(m\rho, 0) = c(m\rho + z/3, 0) = c(m\rho + 2z/3, 0) &= e(m(\rho, \gamma)) + e(-m(\rho, \gamma)) \\ &= \begin{cases} 2, & \text{falls } m \equiv 0 \mod 3, \\ -1, & \text{falls } m \not\equiv 0 \mod 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Summe

$$\sum_{\substack{\lambda \in \rho + K' \\ \lambda \in \overline{W}}} c(\lambda) e((\lambda, Z))$$

ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} &e((\rho, Z)) \prod_{m>0} \Big((1 - e((m\rho, Z)))(1 - e(1/3)e((m\rho, Z)))(1 - e(2/3)e((m\rho, Z))) \Big)^{c(m\rho,0)} \\ &= e((\rho, Z)) \prod_{m>0} (1 - e(3(m\rho, Z)))^{c(m\rho,0)} \\ &= e((\rho, Z)) \prod_{m>0} (1 - e(3(m\rho, Z)))^{-1} \prod_{\substack{m>0 \\ m \equiv 0 \bmod 3}} (1 - e(3(m\rho, Z)))^3 \\ &= \frac{e(\frac{27}{24}(\rho, Z))}{e(\frac{3}{24}(\rho, Z))} \prod_{m>0} \frac{(1 - e(9(m\rho, Z)))^3}{(1 - e(3(m\rho, Z)))} = \frac{\eta(9(\rho, Z))^3}{\eta(3(\rho, Z))}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewünschte Fourier-Entwicklung. □

5.3.2 Das einfache Gitter der Stufe 2 vom Typ $(2,6)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$

Es sei L ein gerades Gitter der Stufe 2 vom Typ $(2,6)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ und es sei $\gamma \in \mathcal{L} = L'/L$ mit $Q(\gamma) = -1/2 \mod 1$ fest gewählt. Wir konstruieren nun zunächst eine vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht -2 mit Hauptteil $e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$, deren Borcherdslift Ψ ein automorphes Produkt von singulärem Gewicht 2 ist, und leiten anschließend Produkt- und Reihenentwicklungen von Ψ in verschiedenen Spitzen her. Da dies alles völlig analog zum Fall des Gitters der Stufe 3 läuft, lassen wir die Beweise aus.

Wir beginnen mit einer expliziteren Darstellung des $\Gamma_1(2)$-Lifts

$$F_{\Gamma_1(2),f,\gamma} = \sum_{M\in\Gamma_1(2)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M^{-1})\,\mathfrak{e}_\gamma$$

einer elliptischen Modulform f. Beachte, dass $\Gamma_1(2)$ zwei Spitzenbahnen hat, die wir als ∞ und 0 wählen können. Die Darstellung $f|_S$ einer elliptischen Modulform f in der Spitze 0 lässt sich wie oben schreiben als $f|_S = g_0 + g_{1/2}$.

Satz 5.3.5. *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $Q(\gamma) = -1/2 \mod 1$. Weiter sei $f \in M^!_k(\Gamma_1(2),\chi_\gamma)$ eine fast holomorphe Modulform zu $\Gamma_1(2)$ vom Gewicht k und Charakter $\chi_\gamma(M) = e(-b/2)$. Schreibe $f|_S = g_0 + g_{1/2}$. Dann ist der $\Gamma_1(2)$-Lift von f bei $\mathfrak{e}_\gamma$ gegeben durch*

$$F_{\Gamma_1(2),f,\gamma} = f\,\mathfrak{e}_\gamma - \frac{1}{4}\sum_{\beta\in\mathcal{L}} e((\beta,\gamma))g_{Q(\beta)}\,\mathfrak{e}_\beta\,.$$

Insbesondere sind die Komponentenfunktionen des Lifts gegeben durch

$$f_\beta = -\frac{1}{4}e((\beta,\gamma))g_{Q(\beta)}$$

für $\beta \neq \pm\gamma$ und

$$f_\gamma = f - \frac{1}{4}g_{1/2}.$$

Beweis. Wähle die drei Matrizen I, S, ST als Repräsentantensystem für $\Gamma_1(2)\setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und berechne ihre Wirkung in der Weil-Darstellung wie in Satz 5.3.1. □

Das Eta-Produkt $f(\tau) = \eta(\tau)^4/\eta(2\tau)^8$ ist nach Theorem 2.4.2 eine Modulform zu $\Gamma_1(2)$ vom Gewicht -2 und Charakter $\chi_\gamma(M) = e(-b/2)$. Weiter haben wir $\mathrm{ord}_\infty(f) = -1/2$ und $\mathrm{ord}_0(f) = 0$, was man an den Produktdarstellungen von f und

$$f|_S(\tau) = -16\frac{\eta(\tau)^4}{\eta(\tau/2)^8}$$

ablesen kann. Aus dem letzten Satz folgt, dass der $\Gamma_1(2)$-Lift von f bei $\mathfrak{e}_\gamma$ eine vektorwertige Modulform zu ρ_L vom Gewicht -2 und Hauptteil $e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$ ist. Wir erhalten:

Theorem 5.3.6. *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $Q(\gamma) = -1/2 \mod 1$. Der $\Gamma_1(2)$-Lift $F = F_{\Gamma_1(2),f,\gamma}$ des Eta-Produkts*

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^8} = q^{-1/2} - 4q^{1/2} + 10q^{3/2} - 24q^{5/2} + 55q^{7/2} - 116q^{9/2} + \dots$$

bei $\mathfrak{e}_\gamma$ ist eine fast holomorphe vektorwertige Modulform zur Weil-Darstellung ρ_L vom Gewicht -2 mit Hauptteil $e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$. Definiere

$$\begin{aligned} f_S(\tau) &= -\frac{1}{16} f|_S(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(\tau/2)^8} = 1 + 8q^{1/2} + 40q + 160q^{3/2} + 552q^2 + \dots \\ &= f_{S,0} + f_{S,1/2}. \end{aligned}$$

Dann sind die Komponentenfunktionen von F gegeben durch

$$f_\beta = 4e((\beta,\gamma)) f_{S,Q(\beta)}$$

für $\beta \neq \gamma$ und

$$f_\gamma = f + 4f_{S,1/2}.$$

Insbesondere sind die Fourier-Koeffizienten von F ganzzahlig.

Bemerkung. Wie im letzten Abschnitt kann man die Komponentenfunktionen f_β von F auch durch Theta-Reihen und Eta-Produkte ausdrücken. Aus dem Transformationsverhalten von F unter S und wegen des Hauptteils $e(-\tau/2)\,\mathfrak{e}_\gamma$ folgt $\operatorname{ord}_\infty(f_\beta) \geq 0$ und $\operatorname{ord}_0(f_\beta) = -1/2$ für $\beta \neq \gamma$. Die Gewichtsformel (2.2) für $\Gamma_1(2)$ zeigt, dass der Raum dieser Modulformen eindimensional ist, d.h. f_β ist bis auf einen konstanten Faktor durch die Ordnungen in den Spitzen festgelegt. Diesen Faktor kann man mithilfe des ersten Fourier-Koeffizienten von f_β bestimmen, den wir im letzten Theorem berechnet haben.

Es sei D_4 das Gitter $\mathbb{Z}^4$ mit der positiv definiten quadratischen Form, die durch die Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Determinante dieser Matrix ist 4. Das Gitter D_4 hat Stufe 2 und seine Diskriminantengruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Nach Beispiel 2.2.4 ist die Theta-Reihe Θ_{D_4} eine Modulform zu $\Gamma_1(2)$ vom Gewicht 2 und trivialem Charakter. Aus der Gewichtsformel (2.2) für $\Gamma_1(2)$ folgt $\operatorname{ord}_\infty(\Theta_{D_4}) = \operatorname{ord}_0(\Theta_{D_4}) = 0$.

Die Komponentenfunktionen f_β von F sind nun folgendermaßen gegeben:

1. Für $Q(\beta) = 0 \mod 1$:

$$f_\beta(\tau) = 4e((\beta,\gamma)) \cdot \Theta_{D_4} \cdot \frac{\eta(2\tau)^8}{\eta(\tau)^{16}}.$$

2. Für $Q(\beta) = 1/2 \mod 1$ mit $\beta \neq \gamma$:

$$f_\beta(\tau) = 32e((\beta,\gamma)) \cdot \frac{\eta(2\tau)^{16}}{\eta(\tau)^{20}}.$$

3. Für $\beta = \gamma$:

$$f_\gamma(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^8} + 32\frac{\eta(2\tau)^{16}}{\eta(\tau)^{20}}.$$

Wir bestimmen nun die Produktentwicklung des automorphen Produkts Ψ zu F in einer primitiven isotropen Spitze $z \in L$. Nach Satz 1.2.6 hat z Stufe 1 oder Stufe 2. Stufe 1 kann nicht auftreten, da man sonst $L = K \oplus II_{1,1}$ als orthogonale direkte Summe schreiben könnte, wobei K ein gerades Gitter der Stufe 2 vom Rang 6 mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ und $\epsilon_2 = -1$ wäre. Ein solches Gitter existiert nach [CS99], Kapitel 15, Theorem 13, nicht.

Damit hat z Stufe 2. Nach Satz 1.2.8 können wir ein primitives isotropes $\zeta \in L$ der Stufe 2 mit $\langle z,\zeta\rangle = 2$ wählen, so dass sich $L = K \oplus II_{1,1}(2)$ als orthogonale direkte Summe zerlegen lässt, wobei $II_{1,1}(2)$ von z und ζ erzeugt wird. Das Gitter K hat Typ $(1,5)$. Setze $z' = \zeta/2 \in L'$. Da ζ orthogonal zu K steht, ist $\zeta_K = 0$ und $p(\lambda) = \lambda_K$ für $\lambda \in L_0'$. Daher ist ein Repräsentantensystem der Elemente $\delta \in L_0'/L$ mit $p(\delta) = \lambda$ gegeben durch die beiden Vektoren $\lambda, \lambda + z/2 \in L_0'$. Nach dem Theorem von Borcherds hat Ψ_z die Produkt-Entwicklung

$$\Psi_z(Z) = e((\rho, Z)) \prod_{\substack{\lambda\in K'\\ (\lambda,W)>0}} \big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{c(\lambda,q(\lambda))}\big(1 + e((\lambda, Z))\big)^{c(\lambda+z/2,q(\lambda))}.$$

Dabei ist W eine Weyl-Kammer des positiven Kegels $C \subseteq K \otimes \mathbb{R}$, ρ der zugehörige Weyl-Vektor und $c(\delta, q(\lambda))$ sind die Fourier-Koeffizienten von F.

Wir wollen nun Fourier-Entwicklungen von Ψ_z für verschiedene Spitzen $z \in L$ herleiten. Dazu unterscheiden wir die Fälle $(z,\gamma) \equiv 0 \mod 2$ und $(z,\gamma) \equiv 1 \mod 2$. Für $(z,\gamma) \equiv 1 \mod 2$ ist die Reduktion F_K von F auf K identisch 0, daher ist die einzige Weyl-Kammer in diesem Fall der positive Kegel C und der Weyl-Vektor ρ ist 0. Eine analoge Rechnung wie in Theorem 5.3.3 zeigt:

Theorem 5.3.7. *Sei $z \in L$ eine primitive isotrope Spitze der Stufe 2 mit $(z,\gamma) \equiv 1 \mod 2$ und seien z', ζ und K wie oben. Weiter sei*

$$f_S(\tau) = \frac{\eta(\tau)^4}{\eta(\tau/2)^8} = 1 + 8q^{1/2} + 40q + 160q^{3/2} + 552q^2 + \dots$$

Es sei C der positive Kegel in $K \otimes \mathbb{R}$ und $K'^{+} = (K' \cap \overline{C}) \setminus \{0\}$. Dann hat Ψ_z die Fourier-Entwicklung

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\lambda\in K'^{+}} \frac{\big(1 - e(-(\lambda,\gamma))e((\lambda, Z))\big)^{8[f_S](q(\lambda))}}{\big(1 - e(2(\lambda, Z))\big)^{4[f_S](q(\lambda))}} = 1 + \sum_{\lambda\in K'^{+}} c(\lambda)e((\lambda, Z)),$$

wobei $c(\lambda)$ nur dann ungleich 0 ist, wenn $\lambda = n\mu$ für ein primitives isotropes $\mu \in K'^{+}$ gilt, in welchem Fall $c(\lambda)$ gleich $e(-(\lambda,\gamma))$ mal dem Koeffizienten bei q^n in

$$\frac{\eta(\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} = 1 - 8q + 24q^2 - 32q^3 + 24q^4 - 48q^5 + 96q^6 + \dots$$

ist.

Wir betrachten nun folgenden Spezialfall: Wähle primitive isotrope $z, \zeta \in L$ mit $\langle z, \zeta\rangle = 2$, so dass sich $L = K \oplus II_{1,1}(2)$ als orthogonale direkte Summe schreiben lässt und $II_{1,1}(2)$ von z und ζ erzeugt wird. Setze anschließend $\gamma = z/2 - \zeta/2 + L$. Dann ist $Q(\gamma) = -1/2 \mod 1$ und $(\lambda,\gamma) = 0 \mod 1$ für alle $\lambda \in K'^{+}$. Wir erhalten die Entwicklung

$$\Psi_z(Z) = \prod_{\lambda \in K'^{+}} \frac{\big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{8[f_S](q(\lambda))}}{\big(1 - e(2(\lambda, Z))\big)^{4[f_S](q(\lambda))}} = 1 + \sum_{\lambda \in K'^{+}} c(\lambda) e((\lambda, Z)),$$

wobei $c(\lambda)$ der Koeffizient bei q^n von $\eta(\tau)^8/\eta(2\tau)^4$ ist, falls $\lambda = n\mu$ für ein primitives isotropes $\mu \in K'^{+}$, und 0 andernfalls. Diese Gleichung ist die Nenneridentität einer verallgemeinerten Kac-Moody-Algebra, und wurde bereits in [Sch09], Abschnitt 8, durch ein automorphes Produkt singulären Gewichts zum Gitter $D_4 \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}(4)$ gefunden.

Im Fall $(z,\gamma) \equiv 0 \mod 2$ wählen wir primitive isotrope $x, \xi \in K$ mit $\langle x, \xi\rangle = 2$, die die hyperbolische Ebene in $K = D_4(-1) \oplus II_{1,1}(2)$ erzeugen, und setzen $\gamma = x/2 - \xi/2 + L$. Dann erhalten wir analog zu Theorem 5.3.4:

Theorem 5.3.8. *Wähle eine Weyl-Kammer W, deren Abschluss x enthält. Dann ist der Weyl-Vektor $\rho = \frac{1}{2}x$ ein primitiver isotroper Vektor von K' und Ψ_z hat die Produkt- und Fourier-Entwicklungen*

$$\begin{aligned}\Psi_z(Z) &= e((\rho, Z)) \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0}} \big(1 - e(2(\lambda, Z))\big)^{4e((\lambda,\gamma))[f_S](q(\lambda))} \\ &\qquad \times \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0 \\ \lambda \equiv \gamma \bmod L}} \big(1 - e((\lambda, Z))\big)^{[f](q(\lambda))} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \det(\sigma) \frac{\eta(4(\sigma(\rho), Z))^8}{\eta(2(\sigma(\rho), Z))^4},\end{aligned}$$

wobei G die Weyl-Gruppe zu F ist, also die Untergruppe von $O(K)$, die von den Spiegelungen entlang der Vektoren

$$\alpha \in K' \text{ mit } q(\alpha) = -1/2 \text{ und } \alpha + K = p(\gamma)$$

erzeugt wird.

6 Anhang

6.1 Fourier-Koeffizienten der Eisensteinreihen für die einfachen Gitter von Primzahlstufe

Wir listen die ersten Fourier-Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der vektorwertigen Eisensteinreihen zur dualen Weil-Darstellung ρ_L^* vom Gewicht $1 + b^-/2$ (siehe Abschnitt 3.4) für die in Theorem 5.1.4 gefundenen einfachen Gitter von Primzahlstufe auf. Dazu benutzen wir die Formeln für $q(\gamma, n)$ aus Theorem 3.4.1

Beachte, dass der Koeffizient $q(\gamma, n)$ nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn $\gamma \in \mathcal{L}$ ist mit $q(\gamma) \equiv -n \mod 1$. Mithilfe der Formeln in [Sch06], Proposition 3.1 und 3.2, kann man entscheiden, ob zu einem gegebenen n ein solches $\gamma \in \mathcal{L}$ existiert.

Im Folgenden sei stets $\gamma \neq 0$. Wir geben die Koeffizienten $q(\gamma, n)$ und $q(0, n)$ für kleine Werte von $n \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ an. Wo kein $\gamma \in \mathcal{L}$ mit $q(\gamma) = -n \mod 1$ existiert, steht ein / in der Tabelle.

Stufe 2**, Typ** $(2, 6)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

n	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$q(\gamma, n)$	-32	-256	-896	-2048	-4032	-7168
$q(0, n)$		-224		-1824		-8064

Stufe 2**, Typ** $(2, 6)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$

n	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$q(\gamma, n)$	-16	-128	-448	-1024	-2016	-3584
$q(0, n)$		-160		-800		-4480

Stufe 2**, Typ** $(2, 6)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$

n	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$q(\gamma, n)$	-8	-64	-224	-512	-1008	-1792
$q(0, n)$		-96		-288		-2688

Stufe 2**, Typ** $(2, 10)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

n	$1/2$	1	$3/2$	2
$q(\gamma, n)$	-16	-512	-3904	-16384
$q(0, n)$		-496		$-16911,5$

Stufe 3**, Typ** $(2,4)$**, Diskriminantengruppe** $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

n	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	2	$7/3$	$8/3$	3
$q(\gamma,n)$	-18	/	-162	-234	/	-486	-900	/	-1458
$q(0,n)$			-180			-432			-1476

Stufe 3**, Typ** $(2,4)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$

n	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	2	$7/3$	$8/3$	3
$q(\gamma,n)$	-6	-18	-54	-78	-144	-162	-300	-306	-486
$q(0,n)$			-72			-108			-504

Stufe 3**, Typ** $(2,4)$**, Diskriminantengruppe** $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$

n	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	2	$7/3$	$8/3$	3
$q(\gamma,n)$	-2	-6	-18	-26	-48	-54	-100	-102	-162
$q(0,n)$			-36			0			-180

Stufe 3**, Typ** $(2,8)$**, Diskriminantengruppe** $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

n	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	2	$7/3$	$8/3$	3
$q(\gamma,n)$	(-6)	-90	-486	/	-3744	-7290	/	-23130	-39366
$q(0,n)$			-480			-7380			-39360

Stufe 5**, Typ** $(2,6)$**, Diskriminantengruppe** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

n	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	1	$6/5$	$7/5$	$8/5$	$9/5$	2
$q(\gamma,n)$	(-2)	-14	-52	/	-250	/	-684	-910	/	-1750
$q(0,n)$					-248					-1764

Stufe 7**, Typ** $(2,8)$**, Diskriminantengruppe** $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

n	$1/7$	$2/7$	$3/7$	$4/7$	$5/7$	$6/7$	1	$8/7$	$9/7$	$10/7$
$q(\gamma,n)$	$(-1/8)$	/	-10	/	-78	-170	$-2401/8$	/	/	-1326
$q(\gamma,0)$							-300			

6.2 Eine vektorwertige Modulform, deren Borcherdslift konstant ist

In den obigen Tabellen sieht man, dass einige Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihen gewisser Gitter verschwinden. Ist $q(\gamma, n) = 0$, so ist der Borcherdslift der vektorwertigen Modulform vom Gewicht $1 - b^-/2$ und Hauptteil $q^{-n}\,\mathfrak{e}_\gamma + q^{-n}\,\mathfrak{e}_{-\gamma}$ (mit $q := e^{2\pi i \tau}$) holomorph und hat nach Theorem 5.0.2 Gewicht 0, ist also konstant.

Es sei L das einfache Gitter der Stufe 3 vom Typ $(2, 4)$ mit Diskriminantengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. Wir wollen beispielhaft eine vektorwertige Modulform F zur Weil-Darstellung von L vom Gewicht -1 und Hauptteil $q^{-2}\,\mathfrak{e}_0$ als $\Gamma_0(3)$-Lift einer elliptischen Modulform f konstruieren. Da der Koeffizient $q(0, 2) = 0$ der Eisensteinreihe für dieses Gitter verschwindet, ist der Borcherdslift von F konstant. Es gilt

$$\chi_{\mathcal{L}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{d}{3}\right)$$

für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(3)$. Wählt man die vier Matrizen I, S, ST, ST^{-1} als Repräsentantensystem für $\Gamma_0(3) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so kann man wie in Satz 5.3.1 nachrechnen, dass der $\Gamma_0(3)$-Lift einer elliptischen Modulform $f \in M_{-1}(\Gamma_0(3), \chi_{\mathcal{L}})$ bei $\mathfrak{e}_0$ durch

$$F_{\Gamma_0(3),f,0} = \sum_{M \in \Gamma_0(3)\setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_M \rho_L(M^{-1})\,\mathfrak{e}_0 = f\,\mathfrak{e}_0 - \frac{3i}{\sqrt{243}} \sum_{\beta \in \mathcal{L}} g_{Q(\beta)}\,\mathfrak{e}_\beta$$

gegeben ist, wobei $f|_S = g_0 + g_{1/3} + g_{2/3}$. Wir suchen daher eine elliptische Modulform f vom Gewicht -1 mit einer Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = q^{-2} + a_0 + a_1 q + \dots$$

und $\mathrm{ord}_0(f) \geq 0$. Wir wählen

$$f(\tau) = \frac{\eta(\tau)^6}{\eta(3\tau)^{18}} \Theta_{A_2}^5 - 24 \frac{\eta(\tau)^3}{\eta(3\tau)^9} \Theta_{A_2}^2 = q^{-2} - 27 + 328q + 1944q^3 + 24854q^4 + \dots,$$

wobei Θ_{A_2} die Theta-Funktion zum A_2-Gitter aus Beispiel 2.2.4 ist. Beachte, dass Θ_{A_2} Gewicht 1 hat und mit $\chi_{\mathcal{L}}$ transformiert. Mit [Bor00], Theorem 6.2, kann man prüfen, dass die Eta-Produkte in f Modulformen zu $\Gamma_0(3)$ vom Gewicht -6 und trivialem Charakter bzw. Gewicht -3 und Charakter $\chi_{\mathcal{L}}$ sind. Daher ist f eine Modulform zu $\Gamma_0(3)$ vom Gewicht -1 und Charakter $\chi_{\mathcal{L}}$, also ein geeigneter Input für den $\Gamma_0(3)$-Lift. Die Fourier-Entwicklungen der Eta-Produkte kann man beispielsweise mit dem Computer-Algebra-System PARI/GP berechnen. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f|_S(\tau) &= 9\sqrt{3}^9 i \frac{\eta(\tau)^6}{\eta(\tau/3)^{18}} \Theta(\tau/3)^5 - 8\sqrt{3}^9 i \frac{\eta(\tau)^3}{\eta(\tau/3)^9} \Theta(\tau/3)^2 \\ &= \sqrt{3}^9 i (1 + 264q^{1/3} + 8217q^{2/3} + 132456q + 1466598q^{4/3} + 12632832q^{5/3} \\ &\qquad + 90523044q^2 + 562500240q^{7/3} + 3116375064q^{8/3} + \dots) \\ &= g_0 + g_{1/3} + g_{2/3} \end{aligned}$$

Daher gilt $\operatorname{ord}_0(f) = 0$. Der $\Gamma_0(3)$-Lift von f ist also genau die vektorwertige Modulform F, die wir suchen. Die Nullkomponente f_0 von F hat die Fourier-Entwicklung

$$f_0(\tau) = q^{-2} + 3576640q + 2444122188q^2 + \ldots$$

Wir sehen, dass der konstante Koeffizient von f_0 verschwindet, so dass das Borcherdsprodukt von F wie gewünscht Gewicht 0 hat.

Da für die einfachen Gitter mit Diskriminantengruppen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ebenfalls einige Koeffizienten $q(\gamma, n)$ der Eisensteinreihen verschwinden, kann man für diese Gitter weitere vektorwertige Modulformen finden, deren Borcherdslifts konstant sind.

Literaturverzeichnis

[BGHZ08] Bruinier, Jan H. ; Geer, Gerard van d. ; Harder, Günter ; Zagier, Don: *The 1-2-3 of Modular Forms.* Springer, 2008

[Bor98] Borcherds, Richard E.: *Automorphic Forms with Singularities on Grassmannians.* Invent. Math. 132, Nr. 3, S. 491-562, 1998

[Bor00] Borcherds, Richard E.: *Reflection Groups of Lorentzian Lattices.* Duke Math. J. 104, Nr. 2000, S. 319-366, 2000

[Bru01] Bruinier, Jan H.: *Borcherds Products on $O(2,l)$ and Chern Classes of Heegner Divisors.* Springer, 2001

[Bru02] Bruinier, Jan H.: *On the Rank of Picard Groups of Modular Varieties Attached to Orthogonal Groups.* Compos. Math. 133, Nr. 1, S. 49-63, 2002

[Bun01] Bundschuh, Michael: *Über die Endlichkeit der Klassenzahl gerader Gitter der Signatur $(2,n)$ mit einfachem Kontrollraum.* Dissertation, 2001

[Coh00] Cohen, Henri: *A Course in Computational Algebraic Number Theory.* Springer, 2000

[CS99] Conway, John ; Sloane, Neil J.: *Sphere Packings, Lattices and Groups, Third Edition.* Springer, 1999

[DS05] Diamond, Fred ; Shurman, Jerry: *A First Course in Modular Forms.* Springer, 2005

[Ebe02] Ebeling, Wolfgang: *Lattices and Codes, 2nd Revised Edition.* Vieweg, 2002

[Hag10] Hagemeier, Heike: *Automorphe Produkte singulären Gewichts.* Dissertation, 2010

[HBJ94] Hirzebruch, Friedrich ; Berger, Thomas ; Jung, Rainer: *Manifolds and Modular Forms.* Vieweg, 1994

[KK07] Koecher, Max ; Krieg, Aloys: *Elliptische Funktionen und Modulformen.* Springer, 2007

[Rad73] Rademacher, Hans: *Topics in Analytic Number Theory.* Springer, 1973

[Sch01] Scheithauer, Nils R.: *Twisting the Fake Monster Super Algebra.* Adv. Math. 164, S. 325-348, 2001

[Sch06] Scheithauer, Nils R.: *On the Classification of Automorphic Products and Generalized Kac-Moody Algebras.* Invent. Math. 164, S 641-678, 2006

[Sch09] Scheithauer, Nils R.: *The Weil Representation of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *and Some Applications.* Int. Math. Res. Notices 2009, Nr. 8, S. 1488-1545, 2009

[Sch11] Scheithauer, Nils R.: *Some Constructions of Modular Forms for the Weil Representation of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Preprint, 2011